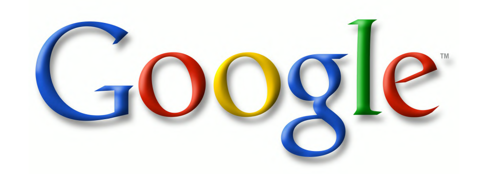
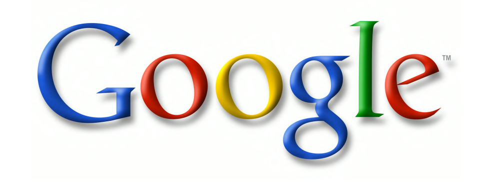




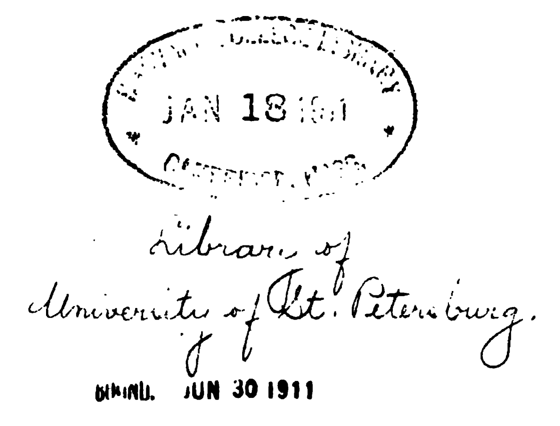
ОБЪ ОДНОМЪ ОБОБЩЕНІИ

АЛГОРИѲМА

НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

Г. Вороной.

ВАРШАВА.
Типографія Варшавскаго Учебнаго Округа. Краковское Предмѣстье, № 3.
1896.



Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ *П. И. Ковалевскій.*

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Въ статьѣ: „De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda“ (Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae, T. II, С.-Петербургъ, 1849 г. стр. 99) Euler даетъ первое обобщеніе алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Jacobi примѣнилъ*) алгориѳмъ Euler'а къ рѣшенію слѣдующей задачи: по даннымъ цѣлымъ раціональнымъ числамъ p, p' и p'', не имѣющимъ общаго дѣлителя, найти цѣлыя числа q, q', q'' и r, r', r'', удовлетворяющія равенству

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Jacobi нѣсколько измѣнилъ алгориѳмъ Euler'а съ цѣлью придать вычисленіямъ болѣе однообразія. Измѣненный такимъ образомъ алгориѳмъ заключается въ слѣдующемъ.

Форма $X\lambda + X'\mu + X''\nu$, коэффиціенты которой положительныя числа, преобразуется сначала подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -\delta_0 & -\varepsilon_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

въ форму $X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1$, при чемъ цѣлыя раціональныя числа δ_0 и ε_0 опредѣляются такъ же, какъ и въ алгориѳмѣ Euler'а, т. е. изъ условій

$$0 \leqq -\delta_0\lambda + \mu < \lambda \quad \text{и} \quad 0 \leqq -\varepsilon_0\lambda + \nu < \lambda.$$

---

*) См. Jacobi: „Ueber die Auflösung der Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = f.u$$“

(Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 69, S. 21). Статья эта была напечатана послѣ смерти автора подъ редакціей E. Heine.

Затѣмъ форма $X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1$ преобразуется подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученная форма преобразуется снова подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -\delta_1 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Совокупность этихъ преобразованій составляетъ алгориѳмъ, который обыкновенно называютъ алгориѳмомъ Jacobi.

Jacobi въ статьѣ: „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird" (Journal f. d. Mathematik. Bd. 69. S. 29), напечатанной послѣ его смерти, составляетъ при помощи чиселъ δ_0, ε_0, δ_1, ε_1 и т. д. ряды цѣлыхъ положительныхъ чиселъ P_i, P'_i и P''_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, опредѣляемыхъ равенствами

$$P_{i+3} = \varepsilon_i P_{i+2} + \delta_i P_{i+1} + P_i, \quad P'_{i+3} = \varepsilon_i P'_{i+2} + \delta_i P'_{i+1} + P'_i, \quad P''_{i+3} = \varepsilon_i P''_{i+2} + \delta_i P''_{i+1} + P''_i$$

и условіями

$$\left.\begin{array}{lll} P_0 = 1, & P'_0 = 0, & P''_0 = 0 \\ P_1 = 0, & P'_1 = 1, & P''_1 = 0 \\ P_2 = 0, & P'_2 = 0, & P''_2 = 1 \end{array}\right\}.$$

На численныхъ примѣрахъ Jacobi показываетъ, что дроби $\frac{P'_i}{P_i}$ и $\frac{P''_i}{P_i}$ съ увеличеніемъ числа i приближаются соотвѣтственно къ предѣламъ $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$, но степень такого приближенія остается неизвѣстной.

Если при помощи алгориѳма Jacobi преобразовывать формы, коэффиціенты которыхъ алгебраическія числа, зависящія отъ корня неприводимаго уравненія 3-й степени, и представлять полученныя такимъ образомъ формы въ нормальномъ видѣ

$$X + X'\varphi + X''\psi, \quad \left(\varphi = \frac{\mu}{\lambda}, \ \psi = \frac{\nu}{\lambda}\right),$$

то въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается, что формы этого вида начинаютъ повторяться періодически.

Весьма интересный и важный вопросъ: всегда ли при помощи алгориѳма Jacobi получаются періодически повторяющіяся формы, когда коэффиціенты ихъ зависятъ отъ корня уравненія 3-й степени — остается и до настоящаго времени не рѣшеннымъ *).

---

*) Въ статьѣ E. Fürstenau: „Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung" (Приложеніе къ

Bachmann показалъ, что этотъ вопросъ находится въ тѣсной связи съ вопросомъ о степени приближенія къ числамъ $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$ дробей $\frac{P_i'}{P_i}$ и $\frac{P_i''}{P_i}$, опредѣляемыхъ при помощи алгориѳма Jacobi. Въ статьѣ: „Zur Theorie von Jacobi's Kettenbruch Algorithmen" (Journal f. d. Mathematik. Bd. 75, S. 25), а также въ книгѣ: „Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen" (Leipzig, 1892. S. 136—151) Bachmann доказываетъ слѣдующее предложеніе.

Предположимъ, что, начиная съ формы $X + X'\rho + X''\rho^2$, *гдѣ* $\rho = \sqrt[3]{A}$, *составленъ при помощи алгориѳма Jacobi безконечный рядъ формъ, представленныхъ въ нормальномъ видѣ. Для того, чтобы эти формы, начиная съ нѣкоторой, періодически повторялись, необходимо и достаточно, чтобы числа* P_i, P_i' *и* P_i'' $_{(i=0,1,2,\ldots)}$ *удовлетворяли неравенствамъ*

$$\left|\frac{P_i'}{P_i} - \rho\right| < \frac{k}{P_i\sqrt{P_i}} \quad \text{и} \quad \left|\frac{P_i''}{P_i} - \rho^2\right| < \frac{k}{P_i\sqrt{P_i}},$$

гдѣ k *нѣкоторое конечное число.*

Въ тѣхъ случаяхъ, когда при помощи алгориѳма Jacobi получается рядъ періодически повторяющихся формъ, произведеніе соотвѣтствующихъ подстановокъ опредѣляетъ подстановку, которая не измѣняетъ нѣкоторой формы

$$X + X'\varphi + X''\psi,$$

т. е. эту форму преобразуетъ въ форму

$$XE + X'E\varphi + X''E\psi.$$

Если такую подстановку обозначить

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

то число E, опредѣляемое равенствомъ

$$E = \alpha + \alpha'\varphi + \alpha''\psi,$$

есть алгебраическая единица, зависящая отъ корня того же уравненія, отъ корня котораго зависятъ числа φ и ψ.

Подстановка, не измѣняющая формы и не тождественная, весьма часто бываетъ очевидна, когда составлено нѣсколько формъ при помощи алгориѳма Jacobi, а между тѣмъ вычисленія по способу Jacobi нужно продолжать еще долго и даже часто остается неизвѣстнымъ, будутъ ли формы повторяться періодически или нѣтъ.

Jahresbericht über das Königliche Realgymnasium zu Wiesbaden. 1874. S. 22) приведено много примѣровъ, подтверждающихъ періодичность алгориѳма Jacobi.

Одно изъ обобщеній алгориѳма непрерывныхъ дробей, представляющее только нѣкоторое измѣненіе алгориѳма Euler'а, принадлежитъ Poincaré. Въ замѣткѣ: „Sur une généralisation des fractions continues" (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, T. 99. p. 1014) Poincaré предлагаетъ слѣдующій алгориѳмъ для преобразованія формы $X\lambda + X'\mu + X''\nu$.

Форма должна быть представлена въ такомъ видѣ, чтобы существовали неравенства

$$0 < \lambda \leqq \mu \leqq \nu.$$

Затѣмъ форма $X\lambda + X'\mu + X''\nu$ преобразуется подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученная форма снова приводится къ виду $X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1$, гдѣ

$$0 < \lambda_1 \leqq \mu_1 \leqq \nu_1 \text{ и т. д.}$$

Poincaré даетъ геометрическое объясненіе, какъ алгориѳму непрерывныхъ дробей, такъ и предлагаемому имъ обобщенію.

Еще одна попытка обобщенія непрерывныхъ дробей въ этомъ направленіи принадлежитъ Hurwitz'у. Въ статьѣ: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche" (Mathematische Annalen, Bd. 44, S. 417) Hurwitz разсматриваетъ особые ряды раціональныхъ дробей, называемые рядами Farey *), и дѣлаетъ попытку обобщить свойства этихъ рядовъ для полученія раціональныхъ дробей $\frac{u}{w}$ и $\frac{v}{w}$, приближающихся къ двумъ даннымъ числамъ, но не даетъ алгориѳма для полученія такихъ дробей **).

Алгориѳмы Euler'а, Jacobi и Poincaré представляютъ лишь формальныя обобщенія алгориѳма непрерывныхъ дробей и оказываются непригодными для рѣшенія тѣхъ основныхъ вопросовъ теоріи алгебраическихъ чиселъ кубической области, которые для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области рѣшаются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

---

*) Литературныя указанія относительно рядовъ Farey приведены въ этой статьѣ Hurwitz'a. См. также: J. Hermes „Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden" (Mathematische Annalen, Bd. 45, S. 371) и K. Th. Vahlen: „Ueber Näherungswerthe und Kettenbrüche" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 115, S. 221). Въ статьѣ: „Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen" (Mathematische Annalen, Bd. 45, S. 85) Hurwitz прилагаетъ ряды Farey къ приведенію бинарныхъ квадратичныхъ формъ, какъ опредѣленныхъ, такъ и неопредѣленныхъ.

**) F. Klein въ замѣткѣ: „Ueber die geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung" (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem. Klasse, 1895, S. 357) въ общихъ чертахъ дѣлаетъ указанія на возможность обобщенія непрерывныхъ дробей при помощи геометрическихъ соображеній. Указанія эти столь общаго характера, что мы затрудняемся вывести изъ нихъ какія нибудь опредѣленныя заключенія.

Lejeune Dirichlet въ замѣчательной статьѣ: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen“ (Dirichlet's Werke, Bd. I, Berlin, 1889, S. 633) предложилъ первое обобщеніе непрерывныхъ дробей, которое для общей теоріи алгебраическихъ чиселъ имѣетъ такое же значеніе, какое имѣютъ непрерывныя дроби для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области.

Kronecker въ статьяхъ: „Sur les unités complexes“ (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, T. 96, p. 93, 148 et 216) и „Additions au mémoire sur les unités complexes“ (C. R. T. 99. p. 766) дополнилъ и обобщилъ результаты, полученные Dirichlet*).

Ограничиваясь тремя перемѣнными X, X' и X'', результаты, полученные Dirichlet, можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

I) *Если система* $(1, \varphi, \psi)$ *неприводимая, то можно найти безчисленное множество системъ цѣлыхъ раціональныхъ значеній перемѣнныхъ* X, X' *и* X'', *удовлетворяющихъ неравенству*

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < \frac{1}{s^2}, \tag{1}$$

гдѣ s *наибольшее изъ чиселъ* $|t'|$ *и* $|t''|$.

II) *Если равенства* $X+X'\varphi+X''\psi=0$ *и* $X+X'\varphi'+X''\psi'=0$ *не возможны одновременно ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* X, X' *и* X'', *то можно найти безчисленное множество системъ цѣлыхъ раціональныхъ значеній перемѣнныхъ* X, X' *и* X'', *удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ*

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < \frac{A}{\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad |t+t'\varphi'+t''\psi'| < \frac{B}{\sqrt{s}}, \tag{2}$$

гдѣ s *наибольшее изъ чиселъ* $|t'|$ *и* $|t''|$; A *и* B *нѣкоторыя конечныя числа.*

Съ увеличеніемъ числа системъ значеній X, X' и X'' число дѣйствій для ихъ опредѣленія на основаніи принципа Dirichlet безпредѣльно увеличивается, и потому въ практическомъ отношеніи этотъ способъ оказывается неудобнымъ.

Системы чиселъ X, X' и X'', удовлетворяющихъ, какъ неравенству (1), такъ и неравенствамъ (2), можно находить также на основаніи принципа Hermite'a.

Въ письмахъ къ Jacobi**) Hermite разсматриваетъ положительныя квадратичныя формы вида

---

*) См. также: L. Kronecker „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen“ (Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, S. 1179).

**) См. „Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres“ (Journal f. d. Mathematik, Bd. 40, S. 261). См. также статью Hermite'a: „Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres“ (Journal f. d. Mathematik Bd. 41, S. 191).

$$(X+X'\varphi+X''\psi)^2+\frac{1}{\Delta}(X'^2+X''^2) \text{ и } (X+X'\varphi+X''\psi)^2+(X+X'\varphi'+X''\psi')^2+\frac{1}{\Delta}X''^2$$

съ перемѣннымъ параметромъ Δ. Если опредѣлять послѣдовательно для различныхъ значеній параметра Δ системы значеній перемѣнныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ minima этихъ квадратичныхъ формъ, то получаемыя такимъ образомъ системы значеній X, X' и X'' будутъ удовлетворять соотвѣтственно неравенству (1) и неравенствамъ (2).

Совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ получаются послѣдовательные minima квадратичныхъ формъ съ перемѣннымъ параметромъ, составляетъ алгориѳмъ Hermite'а.

Какъ принципъ Dirichlet, такъ и принципъ Hermite'а имѣютъ каждый свое самостоятельное значеніе и прилагаются къ различнымъ вопросамъ теоріи чиселъ *).

Прекрасное изложеніе примѣненій принципа Dirichlet къ общей теоріи алгебраическихъ чиселъ можно найти въ книгѣ: „Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune Dirichlet" (Supplement XI, § 181 и 183. Vierte Auflage, Braunschweig, 1894).

Е. Золотаревъ въ сочиненіи: „Объ одномъ неопредѣленномъ уравненіи третьей степени" (С. Петербургъ, 1869 г.) примѣнилъ принципъ Hermite'а къ разысканію алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія $\rho^3=A$ **).

Для разысканія алгебраическихъ единицъ на основаніи принципа Hermite'а весьма важно имѣть способъ, который давалъ бы *всѣ* послѣдовательные minima формы при непрерывномъ измѣненіи параметра, способъ же, предложенный Золотаревымъ для полученія послѣдовательныхъ minima формъ, нуждается въ дополненіи (впрочемъ нисколько не измѣняющемъ сущности этого способа) для того, чтобы при помощи видоизмѣненнаго способа получались всѣ послѣдовательные minima формъ.

Charve въ сочиненіи: De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré" (Suppl. au T. IX. des Annales Scient. de l'École Normale Supérieure, 1880) примѣнилъ принципъ Hermite'а къ вычисленію алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени, какъ съ отрицательнымъ, такъ и съ положительнымъ дискриминантомъ. Для этой цѣли Charve воспользо-

---

*) См. напримѣръ, статьи: H. Minkowski „Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnlichen Algorithmen" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 107, S. 278) и „Théorèmes arithmétiques" (C. R. T. 112. p. 209).

**) См. также: Е. Золотаревъ „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ съ приложеніемъ къ интегральному исчисленію" (С.-Петербургъ, 1874, § 29).

вался способомъ приведенія положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ, предложеннымъ Selling'омъ *).

Для опредѣленія алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ, Charve разсматриваетъ формы съ однимъ перемѣннымъ параметромъ. Опредѣляя для каждаго значенія параметра приведенную квадратичную форму эквивалентную данной, Charve получаетъ безконечный рядъ приведенныхъ формъ и доказываетъ, что подстановки, при помощи которыхъ получаются всѣ эти приведенныя формы, повторяются періодически. При помощи этихъ подстановокъ Charve находитъ подстановку, опредѣляющую основную алгебраическую единицу.

Недостатокъ способа Charve'a состоитъ въ томъ, что онъ вычисляетъ приведенныя формы не для того, чтобы получить послѣдовательные minima данной формы (какъ это дѣлаетъ Золотаревъ), а для того, чтобы получить полную систему приведенныхъ формъ, изъ которыхъ получаются всѣ остальныя приведенныя формы при помощи періодически повторяющихся подстановокъ. Между тѣмъ значеніе принципа Hermite'a заключается въ томъ, что каждой алгебраической единицѣ соотвѣтствуетъ при нѣкоторомъ значеніи параметра minimum разсматриваемой Charve'омъ квадратичной формы. Упуская изъ виду главную цѣль полученія приведенныхъ формъ, Charve безъ нужды усложняетъ вычисленія, и вслѣдствіе этого очень часто оказывается, что среди вычисленныхъ приведенныхъ формъ находится форма, minimum которой опредѣляетъ основную алгебраическую единицу, а между тѣмъ по способу Charve'a вычисленія нужно продолжать еще дальше, пока не получится полная система приведенныхъ формъ, изъ которой выводятся всѣ остальныя формы при помощи періодически повторяющихся подстановокъ.

Существенный недостатокъ принципа Hermite'a въ практическомъ отношеніи заключается въ томъ, что съ измѣненіемъ параметра одни коэффиціенты формъ быстро увеличиваются, другіе уменьшаются, такъ что оказывается необходимымъ или замѣнять полученныя формы новыми, вычисленными съ бóльшею точностью (какъ это дѣлаетъ Charve), или же преобразовывать формы, умножая ихъ коэффиціенты на нѣкоторыя алгебраическія числа. Послѣ такого преобразованія всѣ коэффиціенты формы приходится вычислять снова, что весьма затрудняетъ ходъ вычисленій.

Для опредѣленія алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, Charve разсматриваетъ формы съ двумя перемѣнными параметрами, но вопроса о разысканіи основной си-

*) См. Selling: „Ueber die binären und ternären quadratischen Formen" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 77, S. 143)

стемы единицъ касается лишь поверхностно и, по нашему мнѣнію, не даетъ способа для его рѣшенія.

Полагая въ основаніе нашихъ изслѣдованій особенную точку зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей, мы предлагаемъ новое его обобщеніе.

Къ новой точкѣ зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей приходимъ, разсматривая въ отдѣлѣ I настоящаго сочиненія значенія коваріантныхъ формъ

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' \tag{3}$$

при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X'. Предполагая, что системы (λ, μ) и (λ', μ') неприводимыя, мы изъ системъ (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (3) при всевозможныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' не равныхъ нулю одновременно выдѣляемъ системы, представляющія относительные minima этихъ формъ, при помощи слѣдующаго опредѣленія *).

Если при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' коваріантныя формы (3) получаютъ такія значенія ω_0 и ω_0', что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t', удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ

$$|t\lambda+t'\mu| < |\omega_0| \quad и \quad |t\lambda'+t'\mu'| < |\omega_0'|,$$

то числа ω_0 и ω_0' мы называемъ относительными minima'ми коваріантныхъ формъ (3) или, символически, системы формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

Системы (ω, ω') и $(-\omega, -\omega')$ не считаемъ различными, разсматриваемъ же совокупность (S) всѣхъ системъ, представляющихъ относительные minima и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$.

Всѣ системы совокупности (S) мы располагаемъ въ безконечный рядъ

$$\ldots(\omega_{-1}, \omega_{-1}'), \quad (\omega_0, \omega_0'), \quad (\omega_1, \omega_1'), \ldots \tag{I}$$

удовлетворяющій условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} \cdots > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \cdots \\ \cdots < |\omega_{-1}'| < |\omega_0'| < |\omega_1'| < \cdots \end{array}\right\}.$$

Систему $(\omega_{k+1}, \omega_{k+1}')$, слѣдующую въ этомъ ряду за системой (ω_k, ω_k'), мы называемъ 1-й системой смежной съ (ω_k, ω_k'), а систему $(\omega_{k-1}, \omega_{k-1}')$—2-й системой смежной съ (ω_k, ω_k').

Оказывается, что всѣ системы ряда (I) могутъ быть получены изъ каждыхъ двухъ смежныхъ системъ ряда (I) при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

---

*) Ср. Е. Золотаревъ: „Объ одномъ неопредѣленномъ уравненіи и т. д.“ (стр. 66).

Это замѣчательное свойство системъ ряда (I) даетъ возможность установить новую точку зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей.

Алгориѳмъ непрерывныхъ дробей составляетъ совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ по даннымъ двумъ смежнымъ системамъ ряда (I) *опредѣляются: какъ система, слѣдующая въ этомъ ряду за данными системами, такъ и имъ предшествующая* *).

Такимъ образомъ открывается путь къ обобщенію алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Способъ для полученія системъ значеній коваріантныхъ формъ (3) смежныхъ съ данной системой, принадлежащей къ совокупности (S), вытекаетъ изъ слѣдующей основной теоремы отдѣла I.

Если системы (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ* (3) *при значеніяхъ перемѣнныхъ*

$$X = p_0,\ X' = p'_0 \quad \text{и} \quad X = p_1,\ X' = p'_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ системой* (ω_0, ω'_0), *то опредѣлитель*

$$\begin{vmatrix} p_0 & p'_1 \\ p'_0 & p'_1 \end{vmatrix}$$

по численной величинѣ равенъ единицѣ.

Эта теорема даетъ возможность вычислять послѣдовательно всѣ системы ряда (I), когда извѣстны двѣ какія нибудь смежныя системы этого ряда.

Для полученія двухъ какихъ нибудь смежныхъ системъ ряда (I) мы пользуемся свойствами приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ.

Систему коваріантныхъ формъ (3) *мы называемъ приведенной системой 1-го рода, если* (λ, λ') *и* (μ, μ') *принадлежатъ къ совокупности* (S) *и при томъ* (μ, μ') *есть 1-я система смежная съ* (λ, λ'); *если* (μ, μ') *есть 2-я система смежная съ* (λ, λ'), *то систему формъ* (3) *называемъ приведенной системой 2-го рода.*

Коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ, представленной въ нормальномъ видѣ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix},$$

удовлетворяютъ условіямъ

$$0 < \varphi < 1 \quad \text{и} \quad \varphi' < -1, \tag{4}$$

*) Эти свойства системъ ряда (I) представляютъ обобщеніе свойствъ послѣдовательныхъ minima линейной формы $X + X'\varphi$ при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, на которыя первый обратилъ вниманіе Lagrange. См. „Additions aux éléments d'Algèbre d'Euler" (Oeuvres de Lagrange publiées par Serret, T. VII, p. 45).

когда эта система приведенная 1-го рода, и условіямъ

$$\varphi > 1 \quad \text{и} \quad 0 > \varphi' > -1, \tag{5}$$

когда эта система приведенная 2-го рода.

Мы пришли такимъ образомъ къ неравенствамъ, которымъ удовлетворяютъ корни $\rho = -\varphi$ и $\rho' = -\varphi'$ уравненія

$$a\rho^2 + 2b\rho + c = 0, \tag{6}$$

когда неопредѣленная квадратичная форма

$$aX^2 + 2bXX' + cX'^2 = a(X + X'\varphi)(X + X'\varphi')$$

удовлетворяетъ условіямъ приведенія Gauss'а *). Корни уравненія (6) удовлетворяютъ неравенствамъ (5), если $b > 0$, и неравенствамъ (4), если $b < 0$.

Въ отдѣлѣ II мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l' + l''i) + X'(m' + m''i) + X''(n' + n''i) \tag{7}$$

и на эти системы формъ распространяемъ всѣ опредѣленія, предложенныя нами въ отдѣлѣ I.

Такъ же, какъ и въ отдѣлѣ I, мы разсматриваемъ совокупность (S) всѣхъ системъ (ω, ω'), представляющихъ относительные minima коваріантныхъ формъ (7) и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$. Всѣ эти системы мы располагаемъ въ рядъ

$$\ldots (\omega_{-1}, \omega'_{-1}), \quad (\omega_0, \omega'_0), \quad (\omega_1, \omega'_1) \ldots \tag{I}$$

послѣдовательныхъ относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (7).

Для полученія системъ этого ряда смежныхъ съ данной системой мы пользуемся слѣдующей основной теоремой отдѣла II.

Если системы (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ* (7) *при значеніяхъ перемѣнныхъ*

$$X = p_0,\ X' = p'_0,\ X'' = p''_0 \quad \text{и} \quad X = p_1,\ X' = p'_1,\ X'' = p''_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ* (ω_0, ω'_0), *то числа*

$$p'_0 p''_1 - p''_0 p'_1, \quad p''_0 p_1 - p_0 p''_1 \quad \text{и} \quad p_0 p'_1 - p'_0 p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя.

Вопросъ о разысканіи системъ смежныхъ съ данной сводится, на основаніи этой теоремы, къ преобразованію системы коваріантныхъ формъ при помощи подстановокъ вида

---

*) См. Gauss: „Disquisitiones arithmeticae" (§ 183) и Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" (§ 74, vierte Auflage).

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Предлагаемый нами алгориѳмъ для опредѣленія коэффиціентовъ подстановки

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

состоитъ въ сущности изъ двухъ алгориѳмовъ; первымъ опредѣляется: 1-я система смежная съ данной; вторымъ — 2-я система смежная съ данной.

Оба эти алгориѳма формулированы въ §§ 28 и 33.

Въ отдѣлѣ II мы выводимъ условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны, и примѣняемъ полученные результаты къ системамъ формъ, зависящимъ отъ корней уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ. Мы доказываемъ, что при преобразованіи такихъ системъ съ помощью предложенныхъ нами алгориѳмовъ всегда получается рядъ періодически повторяющихся приведенныхъ системъ.

Въ этомъ же отдѣлѣ мы даемъ способъ для полученія основной алгебраической единицы и способъ для опредѣленія числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ разсматриваемой кубической области.

Въ отдѣлѣ III мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad \text{и} \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu''.$$

Понятіе объ относительныхъ minima'хъ этихъ формъ, совокупности (S) системъ, представляющихъ относительные minima, о смежныхъ системахъ этой совокупности и т. д. мы устанавливаемъ, обобщая опредѣленія, предложенныя въ отдѣлахъ I и II.

Преобразуя при помощи даннаго нами въ отдѣлѣ III. алгориѳма (§ 52) систему коваріантныхъ формъ, коэффиціенты которой зависятъ отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, мы доказываемъ, что такимъ образомъ всегда получается рядъ періодически повторяющихся приведенныхъ системъ. Изъ разсмотрѣнія двухъ рядовъ приведенныхъ системъ мы выводимъ способъ для полученія основной системы алгебраическихъ единицъ и для опредѣленія числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ разсматриваемой области.

Извѣстно, что при разысканіи основной системы единицъ этой кубической области по способу Dirichlet приходится находить minimum нѣкотораго опредѣлителя, составленнаго изъ логариѳмовъ модулей двухъ какихъ нибудь независимыхъ единицъ *).

*) См. Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" (§ 183, S. 601. Vierte Auflage).

Предлагаемый нами способъ полученія основной системы единицъ, по нашему мнѣнію, представляетъ интересъ, помимо практическаго удобства, еще въ томъ отношенія, что для полученія основной системы единицъ по этому способу оказывается ненужнымъ разысканіе наименьшаго значенія опредѣлителя Dirichlet.

Настоящее сочиненіе было совершенно закончено и начато печатаніемъ, когда въ Варшавѣ былъ полученъ № 2 13-го тома журнала: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.

Въ этомъ номерѣ помѣщена статья: H. Minkowski „Généralisation de la théorie des fractions continues" (p. 41).

Minkowski разсматриваетъ въ этой статьѣ главнымъ образомъ коваріантныя формы, которыя мы разсматриваемъ въ отдѣлѣ III. Свои изслѣдованія Minkowski облекаетъ въ геометрическую форму, при чемъ основной задачей ставитъ опредѣленіе параллелепипедовъ особаго рода, которые онъ называетъ „parallélépipèdes extrêmes".

Не трудно убѣдиться въ томъ, что совокупность такихъ параллелепипедовъ опредѣляетъ совокупность системъ относительныхъ minima, которую мы называемъ совокупностью (S). Если положить въ основаніе понятіе о смежныхъ системахъ, установленное нами въ отдѣлѣ III, но прибавить условіе, что системы смежны взаимно, то окажется, что Minkowski даетъ способъ для полученія различныхъ системъ смежныхъ съ данной. Алгориѳмъ, который предлагаетъ Minkowski, существенно отличается отъ алгориѳма, предлагаемаго нами, такъ какъ Minkowski опредѣляетъ тѣ системы, которыя мы не считаемъ смежными съ данной.

Въ заключеніе замѣтимъ, что всѣ почти предложенія Minkowski въ своей статьѣ даетъ безъ доказательствъ.

Г. Вороной.

Варшава, 24-го Мая 1896 года.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ I.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ

$\omega = X\lambda + X'\mu$ и $\omega' = X\lambda' + X'\mu'$

при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

ОТДѢЛЪ II.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ $\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu$ и $\omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i)$ при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

ОТДѢЛЪ III.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ $\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu$, $\omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu'$ и $\omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu''$ при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

ОТДѢЛЪ I.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu'$$

при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

О системѣ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

§ 1.

Мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu', \tag{1}$$

коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

1) λ, μ, λ' и μ' дѣйствительныя числа;

2) опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix} = \varkappa$$

не равенъ нулю;

3) системы

$$(\lambda, \mu) \quad \text{и} \quad (\lambda', \mu')$$

неприводимы *).

*) Система (λ, μ) называется неприводимой, если равенство $X\lambda + X'\mu = 0$ не возможно ни при какихъ раціональныхъ значеніяхъ X и X' одновременно не равныхъ нулю. Ср. Lejeune Dirichlet: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen" (Dirichlet's Werke, Bd. I, S. 633).

Символомъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}$$

обозначимъ систему коваріантныхъ формъ (1). Перемѣннымъ X и X' будемъ давать только цѣлыя раціональныя значенія. Совокупность значеній ω и ω' коваріантныхъ формъ (1) при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' согласимся называть системой (ω, ω'), а числа: ω первымъ и ω' вторымъ — элементами системы.

Относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 2.

Опредѣленіе. *Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' коваріантныя формы*

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \textit{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' \qquad (1)$$

получаютъ такія значенія ω_0 и ω'_0, что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t', которыя удовлетворяли бы одновременно неравенствамъ

$$|t\lambda + t'\mu| < |\omega_0| \quad \textit{и} \quad |t\lambda' + t'\mu'| < |\omega'_0|.$$

Такія числа ω_0 и ω'_0 условимся называть относительными minima'ми системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Значенія коваріантныхъ формъ (1) *равныя нулю исключаются изъ разсмотрѣнія* *).

Если ω_0 и ω'_0 относительные minima системы коваріантныхъ формъ (2), то числа $-\omega_0$ и $-\omega'_0$ также относительные minima той же системы коваріантныхъ формъ. Условимся не считать различными системы (ω_0, ω'_0) и $(-\omega_0, -\omega'_0)$. Въ послѣдующемъ изложеніи мы выбираемъ изъ двухъ системъ (ω_0, ω'_0) и $(-\omega_0, -\omega'_0)$ ту, первый элементъ которой положительное число.

§ 3.

Обозначимъ черезъ (S) совокупность всѣхъ системъ (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (1), представляющихъ относительные minima.

---

*) Ср. Е. Золотаревъ: „Объ одномъ неопредѣленномъ уравненіи третьей степени". (С.-Петербургъ. 1869 г. Стр. 66).

Лемма I. *Къ совокупности (S) принадлежитъ конечное число системъ, элементы которыхъ ω и ω' по численной величинѣ меньше данныхъ чиселъ ε и ε'.*

Лемма эта есть частный случай болѣе общаго предложенія, заключающагося въ томъ, что неравенства

$$|t\lambda+t'\mu| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |t\lambda'+t'\mu'| < \varepsilon',$$

на основаніи § 1, возможны только при конечномъ числѣ значеній цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t'.

Лемма II. *Если система (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ* (1) *не принадлежитъ къ совокупности (S), то среди системъ совокупности (S) можно найти систему (ω_k, ω'_k), элементы которой по численной величинѣ меньше чиселъ* $|\omega|$ и $|\omega'|$.

Такъ какъ по предположенію система (ω, ω') не принадлежитъ къ совокупности (S), то, на основаніи § 2, можно найти цѣлыя раціональныя числа t_0 и t'_0, удовлетворяющія неравенствамъ

$$0 < t_0\lambda+t'_0\mu < |\omega| \quad \text{и} \quad |t_0\lambda'+t'_0\mu'| < |\omega'|.$$

Обозначимъ

$$\omega_0 = t_0\lambda+t'_0\mu \quad \text{и} \quad \omega'_0 = t_0\lambda'+t'_0\mu'.$$

Если система (ω_0, ω'_0) не принадлежитъ къ совокупности (S), то существуетъ система (ω_1, ω'_1) значеній коваріантныхъ формъ (1), элементы которой ω_1 и ω'_1 удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0 < \omega_1 < \omega_0 \quad \text{и} \quad |\omega'_1| < |\omega'_0|.$$

Если система (ω_1, ω'_1) не принадлежитъ къ совокупности (S), то существуетъ система (ω_2, ω'_2), при чемъ

$$0 < \omega_2 < \omega_1 \quad \text{и} \quad |\omega'_2| < |\omega'_1|.$$

Рядъ такихъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ (\omega_2, \omega'_2), \ldots \tag{3}$$

не можетъ быть безконечнымъ, такъ какъ по условію существуютъ неравенства

$$\left.\begin{array}{l} |\omega| > \omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \cdots \\ |\omega'| > |\omega'_0| > |\omega'_1| > |\omega'_2| > \cdots \end{array}\right\}.$$

Послѣдній членъ ряда (3) есть система, принадлежащая къ совокупности (S) и удовлетворяющая условіямъ леммы.

Лемма III. *Къ совокупности (S) принадлежитъ безчисленное множество системъ, первый элементъ которыхъ меньше даннаго числа*

ε, *и безчисленное множество системъ, второй элементъ которыхъ по численной величинѣ меньше* ε'.

Можно найти сколько угодно цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t', удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$0 < t\lambda + t'\mu < \varepsilon.$$

Обозначимъ

$$\omega = t\lambda + t'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = t\lambda' + t'\mu'.$$

Если система (ω, ω') не принадлежитъ къ совокупности (S), то, на основаніи леммы II-й, существуетъ система (ω_0, ω'_0), принадлежащая къ совокупности (S) и элементы которой удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0 < \omega_0 < \omega \quad \text{и} \quad |\omega'_0| < |\omega'|.$$

Поэтому система (ω_0, ω'_0) удовлетворяетъ условіямъ леммы.

Полагая $\varepsilon = \omega_0$, подобнымъ же образомъ найдемъ систему (ω_1, ω'_1), принадлежащую къ совокупности (S) и которая также будетъ удовлетворять условіямъ леммы.

Очевидно теперь, что можно найти сколько угодно системъ, принадлежащихъ къ совокупности (S) и удовлетворяющихъ условіямъ леммы.

Лемма IV. *Къ совокупности (S) принадлежитъ безчисленное множество системъ, первый элементъ которыхъ не меньше даннаго числа* ε, *и безчисленное множество системъ, второй элементъ которыхъ по численной величинѣ не меньше* ε'.

Эта лемма легко доказывается на основаніи леммъ I-й и III-й.

Лемма V. *Къ совокупности (S) принадлежитъ конечное число системъ, первый элементъ которыхъ не меньше даннаго числа* ε, *но меньше* ε_1, *и конечное число системъ, второй элементъ которыхъ по численной величинѣ не меньше* ε', *но меньше* ε'_1.

Пусть (ω, ω') какая нибудь система, принадлежащая къ совокупности (S) и первый элементъ которой удовлетворяетъ условію

$$0 < \omega < \varepsilon.$$

Если система (ω_k, ω'_k) удовлетворяетъ условіямъ леммы, то

$$\varepsilon \leqq \omega_k < \varepsilon_1, \tag{4}$$

и потому

$$0 < \omega < \omega_k. \tag{5}$$

Такъ какъ система (ω_k, ω'_k) принадлежитъ къ совокупности (S), то, на основаніи § 2, при существованіи неравенствъ (5) необходимо

$$|\omega'_k| < |\omega'|. \tag{6}$$

На основаніи леммы I-й, къ совокупности (S) принадлежитъ конечное число системъ, элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ (4) и (6). Лемма такимъ образомъ доказана.

О смежныхъ системахъ совокупности (S).

§ 4.

Возьмемъ какую нибудь систему (ω_0, ω'_0), принадлежащую къ совокупности (S). На основаніи леммы III-й § 3, существуетъ безчисленное множество системъ, принадлежащихъ къ совокупности (S) и первый элементъ которыхъ меньше ω_0. Среди такихъ системъ можно найти систему, второй элементъ которой имѣетъ наименьшую численную величину. Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, найдемъ какую нибудь систему (ω_k, ω'_k) совокупности (S), удовлетворяющую условію

$$0 < \omega_k < \omega_0.$$

Предположимъ, что второй элементъ системы (ω_k, ω'_k) не имѣетъ наименьшей численной величины, т. е. существуетъ система (ω_h, ω'_h), принадлежащая къ совокупности (S) и элементы которой удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0 < \omega_h < \omega_0 \quad \text{и} \quad |\omega'_h| < |\omega'_k|.$$

На основаніи леммы I-й § 3, число такихъ системъ конечно, и между ними можно найти систему (ω_1, ω'_1), второй элементъ которой имѣетъ наименьшую численную величину. Система (ω_1, ω'_1) и будетъ искомая; ее назовемъ первой системой смежной съ системой (ω_0, ω'_0).

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ существованіи системы $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$, второй элементъ которой по численной величинѣ меньше числа $|\omega'_0|$, а первый элементъ имѣетъ наименьшую величину.

Мы будемъ называть систему $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ второй системой смежной съ системой (ω_0, ω'_0).

Понятіе о смежныхъ системахъ совокупности (S) можно также установить при помощи слѣдующаго опредѣленія.

Опредѣленіе. *Если система (ω_0, ω'_0) принадлежитъ къ совокупности (S), то всегда можно найти только одну систему (ω_1, ω'_1) значеній коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu', \tag{1}$$

элементы которой удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

1) $$0 < \omega_1 < \omega_0;$$

2) *ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* t *и* t' *неравенства*

$$|t\lambda+t'\mu| < \omega_0 \quad \text{и} \quad |t\lambda'+t'\mu'| < |\omega'_1|$$

не могутъ существовать одновременно.

Система (ω_1, ω'_1) *принадлежитъ къ совокупности* (S), *и эту систему мы называемъ первой системой смежной съ системой* (ω_0, ω'_0).

Всегда можно найти только одну систему $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ *значеній коваріантныхъ формъ* (1), *элементы которой удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:*

1) $$|\omega'_{-1}| < |\omega'_0|;$$

2) *ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* t и t' *неравенства*

$$|t\lambda+t'\mu| < \omega_{-1} \quad и \quad |t\lambda'+t'\mu'| < |\omega'_0|$$

не могутъ существовать одновременно.

Система $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ *принадлежитъ къ совокупности* (S), *и эту систему мы называемъ второй системой смежной съ системой* (ω_0, ω'_0).

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

1. *Если система* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k), *то система* (ω_k, ω'_k) *есть вторая система смежная съ системой* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$.

2. *Если система* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k), *а* (ω, ω') *какая нибудь другая система значеній коваріантныхъ формъ* (1), *то при существованіи неравенства*

$$|\omega| < \omega_k$$

должно существовать неравенство

$$|\omega'| > |\omega'_{k+1}|.$$

3. *Если системы* (ω_k, ω'_k) *и* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *смежныя, то числа* ω'_k *и* ω'_{k+1} *различныхъ знаковъ.*

По условію

$$\omega_k > \omega_{k+1} > 0,$$

и потому

$$|\omega'_k| < |\omega'_{k+1}|. \tag{2}$$

Такъ какъ

$$0 < \omega_k - \omega_{k+1} < \omega_k,$$

и равенство

$$\omega_k - \omega_{k+1} = \omega_{k+1}$$

очевидно невозможно, то необходимо:

$$|\omega'_k - \omega'_{k+1}| > |\omega'_{k+1}|.$$

На основанiи неравенства (2) убѣждаемся въ томъ, что числа ω'_k и ω'_{k+1} различныхъ знаковъ.

Послѣдовательные относительные minima системы коварiантныхъ формъ.

§ 5.

Пусть (ω_0, ω'_0) какая нибудь система, принадлежащая къ совокупности (S). Найдемъ первую систему смежную съ (ω_0, ω'_0). Пусть эта система (ω_1, ω'_1). Найдемъ первую смежную съ ней систему (ω_2, ω'_2) и т. д. Получимъ безконечный рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ (\omega_2, \omega'_2),\ \ldots \tag{1}$$

элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l}\omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \cdots \\ |\omega'_0| < |\omega'_1| < |\omega'_2| < \cdots\end{array}\right\}.$$

Къ ряду (1) принадлежать всѣ системы совокупности (S), первый элементъ которыхъ меньше перваго элемента системы (ω_0, ω'_0).

Предположимъ, что среди системъ совокупности (S) можно найти систему (ω, ω'), удовлетворяющую условiю

$$0 < \omega < \omega_0$$

и не заключающуюся въ ряду (1). На основанiи леммы V-й § 3 убѣждаемся въ томъ, что въ ряду (1) можно найти двѣ смежныхъ системы (ω_k, ω'_k) и $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$, опредѣляемыхъ условiемъ

$$\omega_k > \omega > \omega_{k+1},$$

и потому на основанiи § 4 (слѣдствiе 2) получаемъ

$$|\omega'| > |\omega'_{k+1}|.$$

Неравенства

$$0 < \omega_{k+1} < \omega \quad \text{и} \quad |\omega'_{k+1}| < |\omega'|$$

невозможны одновременно, если только система (ω, ω') принадлежитъ къ совокупности (S). Слѣдовательно, система (ω, ω') находится въ ряду (1).

Найдемъ вторую систему смежную съ системой (ω_0, ω'_0). Пусть эта система $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$. Затѣмъ найдемъ вторую систему смежную съ системой $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$. Пусть эта система будетъ $(\omega_{-2}, \omega'_{-2})$ и т. д.

Получаемъ безконечный рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_{-1}, \omega'_{-1}),\ (\omega_{-2}, \omega'_{-2}),\ \dots \qquad (2)$$

элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l}\omega_0 < \omega_{-1} < \omega_{-2} < \cdots \\ |\omega'_0| > |\omega'_{-1}| > |\omega'_{-2}| > \cdots\end{array}\right\}.$$

Къ ряду (2) принадлежатъ всѣ системы совокупности (S), первый элементъ которыхъ больше перваго элемента системы (ω_0, ω'_0).

Соединяемъ ряды (1) и (2) въ одинъ рядъ

$$\dots\ (\omega_{-2}, \omega'_{-2}),\ (\omega_{-1}, \omega'_{-1}),\ (\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ (\omega_2, \omega'_2),\ \dots \qquad (\mathrm{I})$$

Рядъ (I) *мы называемъ рядомъ послѣдовательныхъ относительныхъ тіпіта значеній коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \textit{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu'. \qquad (3)$$

Этотъ рядъ обладаетъ слѣдующими свойствами:

1. *Рядъ* (I) *можно продолжать сколь угодно далеко, какъ вправо такъ и влѣво отъ каждаго члена ряда.*

2. *Коэффиціенты системъ ряда* (I) *удовлетворяютъ неравенствамъ*

$$\left.\begin{array}{l}\cdots > \omega_{-2} > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \cdots \\ \cdots < |\omega'_{-2}| < |\omega'_{-1}| < |\omega'_0| < |\omega'_1| < |\omega'_2| < \cdots\end{array}\right\}.$$

3. *Каждый членъ ряда* (I) *есть система значеній коваріантныхъ формъ* (3), *принадлежащая къ совокупности* (S), *и наоборотъ каждая система совокупности* (S) *принадлежитъ къ ряду* (I).

4. *Изъ двухъ рядомъ стоящихъ системъ* (ω_k, ω'_k) *и* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *ряда* (I) *система* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k); *наоборотъ* (ω_k, ω'_k) *есть вторая система смежная съ системой* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$.

5. *Если подстановка*

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix} = \pm 1$$

преобразуетъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix}\lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu'\end{bmatrix}$$

въ эквивалентную ей систему

$$\begin{bmatrix}\lambda_1, & \mu_1 \\ \lambda'_1, & \mu'_1\end{bmatrix}, \qquad (4)$$

то рядъ послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ (4) *тождественъ съ рядомъ* (I).

О значеніяхъ перемѣнныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 6.

Основная теорема. *Если системы* (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad и \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' \tag{1}$$

при значеніяхъ перемѣнныхъ

$$X = p_0,\ X' = p'_0 \quad и \quad X = p_1,\ X' = p'_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ системой* (ω_0, ω'_0), *то опредѣлитель*

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p'_0 & p'_1 \end{vmatrix}$$

по численной величинѣ равенъ единицѣ.

Замѣтимъ прежде всего, что числа p_0 и p'_0 не могутъ имѣть общаго дѣлителя. Предположимъ, что числа p_0 и p'_0 имѣютъ общимъ дѣлителемъ число δ. На основаніи равенствъ

$$\omega_0 = p_0\lambda + p'_0\mu \quad и \quad \omega'_0 = p_0\lambda' + p'_0\mu'$$

убѣждаемся, что въ этомъ случаѣ система $\left(\frac{\omega_0}{\delta}, \frac{\omega'_0}{\delta}\right)$ представляетъ значенія коваріантныхъ формъ (1) при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X', и такъ какъ очевидно

$$0 < \frac{\omega_0}{\delta} < \omega_0 \quad и \quad \left|\frac{\omega'_0}{\delta}\right| < |\omega'_0|,$$

то система (ω_0, ω'_0) не можетъ представлять относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (1). Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что числа p_1 и p'_1 не могутъ имѣть общаго дѣлителя.

Обозначимъ для краткости

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p'_0 & p'_1 \end{vmatrix} = e. \tag{2}$$

Число e не можетъ быть равно нулю, такъ какъ изъ равенства

$$p_0p'_1 - p'_0p_1 = 0$$

Стр.

ОТДѢЛЪ I.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu'$$

при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

О системѣ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

§ 1.

Мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu', \qquad (1)$$

коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

1) λ, μ, λ' и μ' дѣйствительныя числа;

2) опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix} = \varkappa$$

не равенъ нулю;

3) системы

$$(\lambda, \mu) \quad \text{и} \quad (\lambda', \mu')$$

неприводимыя *).

*) Система (λ, μ) называется неприводимой, если равенство $X\lambda + X'\mu = 0$ не возможно ни при какихъ раціональныхъ значеніяхъ X и X' одновременно не равныхъ нулю. Ср. Lejeune Dirichlet: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen" (Dirichlet's Werke, Bd. I, S. 633).

эквивалентными ей системами вида

$$\begin{bmatrix} \omega_k, & \omega_{k+1} \\ \omega'_k, & \omega'_{k+1} \end{bmatrix},$$

въ которыхъ (ω_k, ω'_k) и $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ смежныя системы совокупности (S), или, что одно и то же, ряда (I) (§ 5).

Замѣняемъ систему (1) эквивалентной ей системой

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1 \\ \omega'_0, & \omega'_1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Согласно съ обозначеніями предыдущаго параграфа полагаемъ

$$p_0 = 1,\ p'_0 = 0 \quad \text{и} \quad p_1 = 0,\ p'_1 = 1. \tag{3}$$

Пусть (ω_2, ω'_2) первая система смежная съ системой (ω_1, ω'_1).

Предположимъ также, что система (ω_2, ω'_2) представляетъ значенія коваріантныхъ формъ (2) при

$$X = p_2 \quad \text{и} \quad X' = p'_2,$$

такъ что

$$\omega_2 = p_2\omega_0 + p'_2\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega'_2 = p_2\omega'_0 + p'_2\omega'_1.$$

На основаніи теоремы предыдущаго параграфа, опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p'_1 & p'_2 \end{vmatrix}$$

равенъ по численной величинѣ единицѣ, и потому на основаніи (3) находимъ

$$p_2 = \pm 1.$$

Слѣдовательно:

$$\omega_2 = \pm\,\omega_0 + p'_2\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega'_2 = \pm\,\omega'_0 + p'_2\omega'_1. \tag{4}$$

Число ω_2 удовлетворяетъ условію:

$$0 < \omega_2 < \omega_1.$$

Равенства (4) могутъ быть удовлетворены только при верхнихъ знакахъ у чиселъ ω_0 и ω'_0.

Допустимъ, что

$$\omega_2 = -\omega_0 + p'_2\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega'_2 = -\omega'_0 + p'_2\omega'_1.$$

На основаніи неравенствъ

$$0 < \omega_2 < \omega_1 < \omega_0$$

убѣждаемся въ томъ, что въ этомъ случаѣ p'_2 есть положительное число

не равное нулю. Мы доказали раньше (§ 4, слѣдствіе 3), что числа ω_0' и ω_1' различныхъ знаковъ. Поэтому на основаніи равенства

$$\omega_2' = -\omega_0' + p_2'\omega_1'$$

приходимъ къ заключенію, что числа ω_1' и ω_2' однаго знака. Это невозможно, если системы (ω_1, ω_1') и (ω_2, ω_2') смежныя.

Итакъ коэффиціенты системы (ω_2, ω_2') опредѣляются равенствами

$$\omega_2 = \omega_0 + p_2'\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_2' = \omega_0' + p_2'\omega_1'$$

или равенствами

$$\omega_2 = \omega_0 - \delta\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_2' = \omega_0' - \delta\omega_1'$$

по замѣнѣ числа p_2' числомъ $-\delta$.

Цѣлое положительное число δ опредѣляется неравенствами

$$0 < \omega_0 - \delta\omega_1 < \omega_1.$$

Такимъ образомъ приходимъ къ слѣдующему результату:

Послѣдовательные относительные тіпіта системы коваріантныхъ формъ (1), *слѣдующіе въ ряду* (I) (§ 5) *за системами* (ω_0, ω_0') *и* (ω_1, ω_1'), *вычисляются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.*

Посмотримъ теперь, какъ вычисляется система $(\omega_{-1}, \omega_{-1}')$, предшествующая въ ряду (I) системамъ (ω_0, ω_0') и (ω_1, ω_1').

Предположимъ, что система $(\omega_{-1}, \omega_{-1}')$ представляетъ значенія коваріантныхъ формъ (2) при

$$X = p_{-1} \quad \text{и} \quad X' = p_{-1}',$$

такъ что

$$\omega_{-1} = p_{-1}\omega_0 + p_{-1}'\omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_{-1}' = p_{-1}\omega_0' + p_{-1}'\omega_1'.$$

На основанія теоремы § 6, опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} p_{-1} & p_0 \\ p_{-1}' & p_0' \end{vmatrix}$$

по численной величинѣ равенъ единицѣ, и потому на основаніи равенствъ (3) будетъ

$$p_{-1}' = \pm 1.$$

Такимъ образомъ находимъ

$$\omega_{-1} = p_{-1}\omega_0 \pm \omega_1 \quad \text{и} \quad \omega_{-1}' = p_{-1}\omega_0' \pm \omega_1'.$$

Такъ какъ $(\omega_{-1}, \omega_{-1}')$ по условію есть вторая система смежная съ системой (ω_0, ω_0'), то имѣютъ мѣсто неравенства

$$\omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > 0 \quad \text{и} \quad |\omega_{-1}'| < |\omega_0'| < |\omega_1'|;$$

кромѣ того числа ω'_{-1} и ω'_0 различныхъ знаковъ. Поэтому необходимо

$$\omega_{-1} = \omega_1 + \delta'\omega_0 \quad \text{и} \quad \omega'_{-1} = \omega'_1 + \delta'\omega'_0.$$

Цѣлое положительное число δ' опредѣляется неравенствами

$$0 < |\omega'_1| - \delta'|\omega'_0| < |\omega'_0|.$$

Приходимъ къ слѣдующему результату:

Послѣдовательные относительные тiпiта системы коварiантныхъ формъ (1), *предшествующiе въ ряду* (I) *системамъ* (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1), *вычисляются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.*

Такимъ образомъ, зная двѣ смежныхъ системы ряда (I), мы можемъ найти сколько угодно системъ, принадлежащихъ къ этому ряду. Остается найти способъ для опредѣленiя двухъ какихъ нибудь смежныхъ системъ ряда (I). Вопросъ этотъ на основанiи теоремы § 6 можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ:

Требуется найти подстановку, которая преобразуетъ данную систему коварiантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}$$

въ эквивалентную ей систему

$$\begin{bmatrix} \omega_k, & \omega_{k+1} \\ \omega'_k, & \omega'_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

гдѣ (ω_k, ω'_k) и $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *смежныя системы совокупности* (S).

Рѣшенiе этого вопроса основано на особенныхъ свойствахъ системъ формъ (5).

Приведенныя системы коварiантныхъ формъ.

§ 8.

Опредѣленiе. *Систему коварiантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix} \tag{1}$$

называемъ приведенной системой 1-го рода, если (λ, λ') *и* (μ, μ') *относительные тiпiта значенiй коварiантныхъ формъ* (1) *и при томъ* (μ, μ') *есть первая система смежная съ* (λ, λ').

Систему формъ (1) *называемъ приведенной системой 2-го рода, если* (μ, μ') *есть вторая система смежная съ* (λ, λ').

Теорема. *Для того, чтобы система коварiантныхъ формъ* (1) *была приведенной системой 1-го рода, необходимо и достаточно, чтобы коэффицiенты ея удовлетворяли слѣдующимъ условiямъ:*

$$\lambda > \mu > 0,\ |\lambda'| < |\mu'| \text{ и числа } \lambda' \text{ и } \mu' \text{ различныхъ знаковъ.} \qquad (2)$$

Когда система (1) *приведенная система 2-го рода, эти условія замѣняются слѣдующими:*

$$0 < \lambda < \mu,\ |\lambda'| > |\mu'| \text{ и числа } \lambda' \text{ и } \mu' \text{ различныхъ знаковъ *}). \qquad (2')$$

На основаніи § 4 убѣждаемся, что приведенныя системы удовлетворяютъ условіямъ теоремы. Предположимъ, что коэффиціенты нѣкоторой системы (1) удовлетворяютъ условіямъ (2).

Докажемъ, что въ этомъ случаѣ системы (λ, λ') и (μ, μ') представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ (1). Если бы, напримѣръ, система (λ, λ') не представляла относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (1), то, на основаніи § 2, существовали бы цѣлыя раціональныя числа t и t', удовлетворяющія неравенствамъ

$$|t\lambda+t'\mu| < \lambda \quad \text{и} \quad |t\lambda'+t'\mu'| < |\lambda'|.$$

На основаніи условій (2) очевидно, что ни число t, ни число t' не можетъ быть равно нулю. Если t и t' не равны нулю и одного знака, то первое неравенство невозможно, а если t и t' различныхъ знаковъ, то второе неравенство невозможно. Слѣдовательно (λ, λ') есть система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (1). Такъ же убѣждаемся въ томъ, что (μ, μ') есть система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (1).

Остается показать, что (μ, μ') есть первая система смежная съ системой (λ, λ'). На основаніи условій (2) убѣждаемся, что ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ t и t' неравенства

$$|t\lambda+t'\mu| < \lambda \quad \text{и} \quad |t\lambda'+t'\mu'| < |\mu'|$$

не могутъ существовать одновременно. По условію

$$0 < \mu < \lambda,$$

слѣдовательно, на основаніи § 4, (μ, μ') есть первая система смежная съ системой (λ, λ').

Такимъ образомъ, по самому опредѣленію, система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}$$

---

*) Эта теорема устанавливаетъ соотношеніе между приведенными системами коваріантныхъ формъ и приведенными неопредѣленными бинарными квадратичными формами:

$$(X\lambda + X'\mu)(X\lambda' + X'\mu').$$

См. Gauss: „Disquisitiones arithmeticae", § 183 и Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" § 74. S. 176. (Vierte Auflage, 1894).

есть приведенная система 1-го рода.

Подобнымъ же образомъ доказывается и вторая часть теоремы.

Замѣчаніе. *Если*

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}$$

приведенная система 1-го рода, то

$$\begin{bmatrix} \mu, & \lambda \\ \mu', & \lambda' \end{bmatrix}$$

приведенная система 2-го рода.

§ 9.

Основываясь на теоремѣ, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, можно каждую данную систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}$$

преобразовать въ эквивалентную ей приведенную систему 1-го или 2-го рода.

Замѣняемъ данную систему формъ эквивалентной ей системой

$$\begin{bmatrix} \lambda_0, & \lambda_1 \\ \lambda_0', & \lambda_1' \end{bmatrix}, \tag{3}$$

гдѣ

$$\lambda_0 > \lambda_1 > 0.$$

Такую замѣну всегда очень легко сдѣлать одной изъ подстановокъ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Если бы оказалось, что числа λ_0' и λ_1' различныхъ знаковъ и при томъ

$$|\lambda_0'| < |\lambda_1'|,$$

то система (3) есть приведенная система 1-го рода. Предположимъ, что λ_0' и λ_1' различныхъ знаковъ, но

$$|\lambda_0'| > |\lambda_1'|.$$

Въ этомъ случаѣ подстановка

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{vmatrix} \tag{4}$$

дѣлаетъ систему (3) приведенной системой 1-го рода. Цѣлое положительное число δ опредѣляется изъ условія

$$0 < \lambda_0 - \delta\lambda_1 < \lambda_1. \tag{5}$$

Предположимъ, что λ'_0 и λ'_1 одного знака. Систему (3) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta_0 \end{vmatrix}$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \\ \lambda'_1, & \lambda'_2 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здѣсь

$$\lambda_2 = \lambda_0 - \delta_0\lambda_1 \quad \text{и} \quad \lambda'_2 = \lambda'_0 - \delta_0\lambda'_1. \tag{7}$$

Цѣлое положительное число δ_0 опредѣляется неравенствами (5), и потому

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

Если теперь λ'_1 и λ'_2 различныхъ знаковъ, то систему (6) дѣлаемъ приведенной системой 1-го рода подстановкой (4). Предположимъ, что λ'_1 и λ'_2 одного знака. На основаніи (7) получаемъ

$$|\lambda'_2| < |\lambda'_0| \quad \text{и} \quad |\lambda'_1| < |\lambda'_0|.$$

Систему (6) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta_1 \end{vmatrix}$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} \lambda_2, & \lambda_3 \\ \lambda'_2, & \lambda'_3 \end{bmatrix}$$

и т. д.

Рядъ получаемыхъ такимъ образомъ системъ

$$\begin{bmatrix} \lambda_0, & \lambda_1 \\ \lambda'_0, & \lambda'_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \\ \lambda'_1, & \lambda'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_2, & \lambda_3 \\ \lambda'_2, & \lambda'_3 \end{bmatrix}, \cdots \tag{8}$$

коэффиціенты которыхъ $\lambda'_0, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$ одного знака, не можетъ быть безконечнымъ, такъ какъ иначе существовали бы неравенства

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots \\ |\lambda'_0| > |\lambda'_1| > |\lambda'_2| > \cdots \end{array}\right\}.$$

Намъ извѣстно (§ 3), что существуетъ конечное число системъ значеній коваріантныхъ формъ (3), элементы которыхъ удовлетворяютъ этимъ неравенствамъ.

Послѣдняя система ряда (8)

$$\begin{bmatrix} \lambda_i, \lambda_{i+1} \\ \lambda'_i, \lambda'_{i+1} \end{bmatrix}$$

можетъ не быть приведенной, но во всякомъ случаѣ числа λ'_i и λ'_{i+1} будутъ различныхъ знаковъ. Преобразовавъ эту систему подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta_i \end{vmatrix},$$

получимъ приведенную систему 1-го рода.

Подобнымъ же образомъ можно преобразовать каждую данную систему коваріантныхъ формъ въ приведенную систему 2-го рода.

Приходимъ къ слѣдующему результату:

При помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована, какъ въ приведенную систему 1-го рода, такъ и въ приведенную систему 2-го рода.

Эквивалентныя системы коваріантныхъ формъ.

§ 10.

Предположимъ, что τ и τ' какія нибудь числа не равныя нулю. Если система (ω, ω') представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, \mu \\ \lambda', \mu' \end{bmatrix} \qquad (1)$$

при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X', то при тѣхъ же значеніяхъ перемѣнныхъ система $(\tau\omega, \tau'\omega')$ представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \tau\lambda\ , \tau\mu \\ \tau'\lambda', \tau'\mu' \end{bmatrix}, \qquad (1')$$

и наоборотъ.

На этомъ основаніи условимся не считать различными системы коваріантныхъ формъ (1) и (1'), какія бы значенія ни имѣли числа τ и τ'.

Системы коваріантныхъ формъ (1) и (1') мы будемъ замѣнять системой

$$\begin{bmatrix} 1, \varphi \\ 1, \varphi' \end{bmatrix},$$

гдѣ

$$\varphi = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{и} \quad \varphi' = \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить, что, производя такую замѣну, мы приводимъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, \mu \\ \lambda', \mu' \end{bmatrix}$$

къ нормальному виду

$$\begin{bmatrix} 1, \varphi \\ 1, \varphi' \end{bmatrix}.$$

Соотвѣтственно съ этой новой точкой зрѣнія на одинаковыя системы коваріантныхъ формъ мы расширяемъ понятіе объ эквивалентныхъ системахъ коваріантныхъ формъ.

Опредѣленіе. *Мы называемъ системы коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} \lambda, \mu \\ \lambda', \mu' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1, \mu_1 \\ \lambda'_1, \mu'_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

эквивалентными, если существуетъ подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1$$

съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, которая одну изъ этихъ системъ, напримѣръ первую, преобразовываетъ въ систему

$$\begin{bmatrix} \tau\lambda_1, \tau\mu_1 \\ \tau'\lambda'_1, \tau'\mu'_1 \end{bmatrix}.$$

Представимъ эквивалентныя системы (2) въ нормальномъ видѣ:

$$\begin{bmatrix} 1, \varphi \\ 1, \varphi' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1, \varphi_1 \\ 1, \varphi'_1 \end{bmatrix}.$$

Здѣсь

$$\varphi = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \varphi' = \frac{\mu'}{\lambda'} \quad \text{и} \quad \varphi_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}, \quad \varphi'_1 = \frac{\mu'_1}{\lambda'_1}.$$

Система

$$\begin{bmatrix} 1, \varphi \\ 1, \varphi' \end{bmatrix} \tag{3}$$

подстановкой

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{4}$$

по условію приводится къ виду

$$\begin{bmatrix} \tau, \tau\varphi_1 \\ \tau', \tau'\varphi'_1 \end{bmatrix}.$$

Здѣсь

$$\tau = \alpha+\alpha'\varphi,\ \tau' = \alpha+\alpha'\varphi' \ \text{ и } \ \tau\varphi_1 = \beta+\beta'\varphi,\ \tau'\varphi'_1 = \beta+\beta'\varphi'.$$

Оказывается такимъ образомъ, что (τ, τ') есть система значеній коваріантныхъ формъ (3) при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ $X=\alpha$ и $Y=\alpha'$.

Система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

подстановкой S^{-1}, обратной подстановкѣ (4), очевидно приводится къ виду

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau}, & \frac{1}{\tau}\varphi \\ \frac{1}{\tau'}, & \frac{1}{\tau'}\varphi' \end{bmatrix},$$

и потому $\left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau'}\right)$ есть система значеній коваріантныхъ формъ (5) при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

§ 11.

Рѣшимъ слѣдующій вопросъ:

Даны системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \psi \\ 1, & \psi' \end{bmatrix}; \tag{6}$$

требуется узнать, эквивалентны ли эти системы или нѣтъ? Замѣтимъ прежде всего, что на основаніи § 9 мы всегда можемъ найти приведенную систему 1-го и 2-го рода эквивалентную данной системѣ. Поэтому мы можемъ замѣнить данныя системы (6) эквивалентными имъ приведенными системами, напримѣръ, 1-го рода:

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Найдемъ рядъ (I) послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Пусть этотъ рядъ (I) (§ 5) состоитъ изъ системъ

$$\ldots\ (\omega_{-1}, \omega'_{-1}),\ (\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ \ldots \tag{9}$$

Здѣсь

$$\omega_0 = 1,\ \omega_0' = 1 \quad \text{и} \quad \omega_1 = \varphi_1,\ \omega_1' = \varphi_1'.$$

На основаніи § 8, системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1 \\ \omega_0', & \omega_1' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_2 \\ \omega_1', & \omega_2' \end{bmatrix}, \ldots \qquad (10)$$

приведенныя системы 1-го рода. На основаніи § 6, эти системы эквивалентны системѣ формъ (8). Всѣ системы ряда (10) представляемъ въ нормальномъ видѣ. Получаемъ рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода:

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_3 \\ 1, & \varphi_3' \end{bmatrix}, \ldots$$

Коэффиціенты этихъ системъ, на основаніи § 8, удовлетворяютъ условіямъ:

$$0 < \varphi_k < 1 \quad \text{и} \quad \varphi_k' < -1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

На основаніи § 7, каждая система этого ряда получается изъ предшествующей подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta \end{vmatrix}.$$

Напримѣръ, система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2' \end{bmatrix}$$

получается изъ системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}$$

подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\delta_1 \end{vmatrix},$$

въ которой цѣлое раціональное число δ_1 опредѣляется изъ неравенствъ

$$0 < 1 - \delta_1\varphi_1 < \varphi_1.$$

Это преобразованіе мы будемъ производить еще слѣдующимъ образомъ:

Систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}$$

подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

преобразуемъ въ систему

$$\begin{bmatrix} \varphi_1, & 1 \\ \varphi'_1, & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ. Эта система дѣлается приведенной системой 1-го рода подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -\delta_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Цѣлое раціональное число δ_1 опредѣляемъ изъ условія

$$0 < -\delta_1 + \frac{1}{\varphi_1} < 1.$$

Составляемъ затѣмъ рядъ приведенныхъ системъ 2-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_{-1} \\ \omega'_0, & \omega'_{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{-1}, & \omega_{-2} \\ \omega'_{-1}, & \omega'_{-2} \end{bmatrix}, \ldots$$

Эти системы представляемъ въ нормальномъ видѣ. Получаемъ рядъ приведенныхъ системъ 2-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{-1} \\ 1, & \varphi'_{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{-2} \\ 1, & \varphi'_{-2} \end{bmatrix}, \ldots$$

Коэффиціенты этихъ системъ, на основаніи § 8, удовлетворяютъ условіямъ

$$\varphi_{-k} > 1 \quad \text{и} \quad 0 > \varphi'_{-k} > -1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Каждая система этого ряда получается изъ предшествующей при помощи подстановки

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta' \end{vmatrix}.$$

Мы это преобразованіе будемъ производить слѣдующимъ образомъ. Напримѣръ, систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{-1} \\ 1, & \varphi'_{-1} \end{bmatrix}$$

подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

преобразуемъ въ систему

$$\begin{bmatrix} \varphi_{-1}, & 1 \\ \varphi'_{-1}, & 1 \end{bmatrix}.$$

Приведя эту систему къ нормальному виду, преобразуемъ ее въ приведенную систему 2-го рода подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \delta' \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Цѣлое положительное число δ' опредѣляемъ изъ условія

$$0 > \delta' + \frac{1}{\varphi'_{-1}} > -1.$$

Подобнымъ же образомъ, начиная съ приведенной системы 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix},$$

составляемъ рядъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \psi_2 \\ 1, & \psi'_2 \end{bmatrix}, \ldots$$

приведенныхъ системъ 1-го рода и рядъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_{-1} \\ 1, & \psi'_{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \psi_{-2} \\ 1, & \psi'_{-2} \end{bmatrix}, \ldots$$

приведенныхъ системъ 2-го рода.

Теорема. *Для того, чтобы системы коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \psi \\ 1, & \psi' \end{bmatrix}$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы ряды соотвѣтственно эквивалентныхъ имъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi'_2 \end{bmatrix}, \ldots \tag{11}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \psi_2 \\ 1, & \psi'_2 \end{bmatrix}, \ldots \tag{12}$$

удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ:

или $\varphi_{k+i} = \psi_i$ *и* $\varphi'_{k+i} = \psi'_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$,

или $\varphi_i = \psi_{h+i}$ *и* $\varphi'_i = \psi'_{h+i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Подобнымъ же условіямъ должны удовлетворять ряды приведенныхъ системъ 2-го рода *).

Данныя системы замѣняемъ эквивалентными имъ приведенными системами 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix}.$$

---

*) Ср. Lagrange: „Recherches d'Arithmétique" (Oeuvres, T. III, p. 728) и Gauss: „Disquisitiones arithmeticae" (§ 193).

Если эти системы эквивалентны, то и данныя системы будутъ эквивалентны, и наоборотъ. Поэтому очевидно, что условія теоремы достаточны для того, чтобы данныя системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны. Нужно только показать, что эти условія необходимыя.

Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

подстановкой

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{14}$$

преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Система (13) послѣ подстановки (14) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \tau, & \tau\psi_1 \\ \tau', & \tau'\psi'_1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Здѣсь

$$\tau = \alpha + \alpha'\varphi_1 \quad \text{и} \quad \tau' = \alpha + \alpha'\varphi'_1. \tag{17}$$

Поэтому, если системѣ (13) соотвѣтствуетъ рядъ

$$\ldots (\omega_{-1}, \omega'_{-1}), (\omega_0, \omega'_0), (\omega_1, \omega'_1), \ldots \tag{18}$$

послѣдовательныхъ относительныхъ minima, то системѣ (16) будетъ соотвѣтствовать этотъ же рядъ послѣдовательныхъ относительныхъ minima, а рядъ послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній системы формъ (15) будетъ

$$\ldots \left(\frac{1}{\tau}\omega_{-1}, \frac{1}{\tau'}\omega'_{-1}\right), \left(\frac{1}{\tau}\omega_0, \frac{1}{\tau'}\omega'_0\right), \left(\frac{1}{\tau}\omega_1, \frac{1}{\tau'}\omega'_1\right), \ldots \tag{19}$$

Такъ какъ (τ, τ'), на основаніи (17), есть система значеній коваріантныхъ формъ (13) при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ и система формъ (16) приведенная 1-го рода, то система (τ, τ') представляетъ относительные minima этихъ формъ, и потому находится въ ряду (18).

Обозначимъ

$$\tau = \omega_k \quad \text{и} \quad \tau' = \omega'_k, \tag{20}$$

слѣдовательно, на основаніи (16),

$$\tau\psi_1 = \omega_{k+1} \quad \text{и} \quad \tau'\psi'_1 = \omega'_{k+1}. \tag{21}$$

I-й случай: $k \geqq 0$.

Приведенную систему

$$\begin{bmatrix} \omega_k, & \omega_{k+1} \\ \omega'_k, & \omega'_{k+1} \end{bmatrix},$$

когда она представлена въ нормальномъ видѣ, мы обозначаемъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+1} \\ 1, & \varphi'_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Съ другой стороны, на основаніи равенствъ (20) и (21), эта система будетъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_1 \\ 1, & \psi'_1 \end{bmatrix},$$

и потому

$$\psi_1 = \varphi_{k+1} \quad \text{и} \quad \psi'_1 = \varphi'_{k+1}.$$

Очевидно, что при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, 3, \ldots$ будутъ существовать равенства

$$\varphi_{k+i} = \psi_i \quad \text{и} \quad \varphi'_{k+i} = \psi'_i.$$

II-й случай: $k < 0$.

Въ ряду (19) система $\left(\frac{1}{\tau}\omega_k, \frac{1}{\tau'}\omega'_k\right)$, на основаніи (20), будетъ $(1, 1)$.

Поэтому система $\left(\frac{1}{\tau}\omega_{k+1}, \frac{1}{\tau'}\omega'_{k+1}\right)$, на основаніи (21), будетъ (ψ_1, ψ'_1).

Представивъ въ нормальномъ видѣ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau}\omega_{k+h}, & \frac{1}{\tau}\omega_{k+h+1} \\ \frac{1}{\tau'}\omega'_{k+h}, & \frac{1}{\tau'}\omega'_{k+h+1} \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

при положительномъ значеніи h получимъ по нашимъ обозначеніямъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_{h+1} \\ 1, & \psi'_{h+1} \end{bmatrix}.$$

Полагая $h = -k$, получимъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \psi_{-k+1} \\ 1, & \psi'_{-k+1} \end{bmatrix}.$$

Съ другой стороны при $h = -k$ система (22) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau}\omega_0, & \frac{1}{\tau}\omega_1 \\ \frac{1}{\tau'}\omega'_0, & \frac{1}{\tau'}\omega'_1 \end{bmatrix}$$

или въ нормальномъ видѣ:

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\varphi_1 = \psi_{-k+1} \quad \text{и} \quad \varphi'_1 = \psi'_{-k+1}.$$

Теперь очевидно, что при всѣхъ значеніяхъ $i = 1, 2, 3, \ldots$ существуютъ равенства

$$\varphi_i = \psi_{-k+i} \quad \text{и} \quad \varphi'_i = \psi'_{-k+i}.$$

Подобнымъ же образомъ доказывается и вторая часть теоремы.

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ.

§ 12.

Доказанная въ предыдущемъ параграфѣ теорема даетъ возможность узнать, эквивалентны ли данныя системы коваріантныхъ формъ или нѣтъ, въ случаяхъ, когда въ соотвѣтствующихъ имъ безконечныхъ рядахъ приведенныхъ системъ число различныхъ системъ конечно. Когда коэффиціенты системъ формъ какія угодно числа, ряды приведенныхъ системъ могутъ состоять изъ безчисленнаго множества различныхъ системъ, и сколько бы мы ни нашли такихъ системъ, нельзя утверждать, что слѣдующія системы не будутъ удовлетворять условіямъ теоремы § 11. Поэтому весьма важно знать, въ какихъ случаяхъ въ безконечныхъ рядахъ приведенныхъ системъ число различныхъ системъ конечно.

Теорема. Для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi'_2 \end{bmatrix}, \ldots \tag{1}$$

1-го или 2-го рода эквивалентныхъ данной системѣ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix} \tag{2}$$

состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты системы (2): φ *и* φ' *были сопряженныя алгебраическія числа, зависящія отъ корней неприводимаго уравненія 2-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.*

Предположимъ, что въ ряду (1) находятся двѣ тождественныя системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k \\ 1, & \varphi'_k \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+n} \\ 1, & \varphi'_{k+n} \end{bmatrix},$$

такъ что существуютъ равенства

$$\varphi_k = \varphi_{k+n} \quad \text{и} \quad \varphi'_k = \varphi'_{k+n}.$$

На основаніи способа полученія системъ ряда (1) (§ 11) убѣждаемся въ томъ, что при значеніяхъ $i = 1, 2, 3, \ldots$ существуютъ равенства

$$\varphi_{k+i} = \varphi_{k+n+i} \quad \text{и} \quad \varphi'_{k+i} = \varphi'_{k+n+i};$$

если $k > 1$, то существуютъ кромѣ того равенства

$$\varphi_{k-j} = \varphi_{k+n-j} \quad \text{и} \quad \varphi'_{k-j} = \varphi'_{k+n-j} \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ рядъ (1) состоитъ изъ періодически повторяющихся системъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi'_2 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 1, & \varphi_n \\ 1, & \varphi'_n \end{bmatrix}.$$

Предположимъ, что система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

подстановкой

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (4)$$

преобразуется въ систему ей тождественную

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{n+1} \\ 1, & \varphi'_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Система (3) послѣ подстановки (4) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} E, & E\varphi_{n+1} \\ E', & E'\varphi'_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Здѣсь

$$E = \alpha + \alpha'\varphi_1,\ E' = \alpha + \alpha'\varphi'_1 \quad \text{и} \quad E\varphi_{n+1} = \beta + \beta'\varphi_1,\ E'\varphi'_{n+1} = \beta + \beta'\varphi'_1.$$

И такъ какъ по условію

$$\varphi_{n+1} = \varphi_1 \quad \text{и} \quad \varphi'_{n+1} = \varphi'_1,$$

то

$$\alpha + \alpha'\varphi_1 = E,\ \alpha' + \alpha'\varphi'_1 = E' \quad \text{и} \quad \beta + \beta'\varphi_1 = E\varphi_1,\ \beta' + \beta'\varphi'_1 = E'\varphi'_1. \qquad (5)$$

Исключая φ_1 изъ равенствъ

$$\alpha + \alpha'\varphi_1 = E \quad \text{и} \quad \beta + \beta'\varphi_1 = E\varphi_1,$$

получимъ уравненіе

$$\begin{vmatrix} \alpha-E, & \alpha' \\ \beta\ , & \beta'-E \end{vmatrix} = 0$$

или

$$E^2 - E(\alpha+\beta') \pm 1 = 0.$$

Этому же уравненію удовлетворяетъ E', слѣдовательно E и E' сопряженныя алгебраическія единицы. Не трудно убѣдиться въ томъ, что полученное квадратное уравненіе неприводимое и что дискриминантъ его положительное число.

На основаніи равенствъ (5) находимъ

$$\varphi_1 = \frac{-\alpha+E}{\alpha'} \quad \text{и} \quad \varphi'_1 = \frac{-\alpha+E'}{\alpha'}.$$

Здѣсь α' очевидно не можетъ равняться нулю, и потому φ_1 и φ'_1 сопряженныя алгебраическія числа, принадлежащія къ той же области, къ которой принадлежатъ числа E и E'.

Такъ какъ системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi'_1 \end{bmatrix}$$

эквивалентныя, то φ и φ' сопряженныя алгебраическія числа, принадлежащія къ той же квадратичной области, къ которой принадлежатъ числа φ_1 и φ'_1.

Первая часть теоремы такимъ образомъ доказана.

Предположимъ теперь, что φ и φ' сопряженныя алгебраическія числа, удовлетворяющія неприводимому уравненію 2-й степени

$$a\rho^2 + 2b\rho + c = 0$$

съ положительнымъ дискриминантомъ. Здѣсь a, b и c цѣлыя раціональныя числа.

Изъ предыдущаго уравненія находимъ

$$\varphi = \frac{-b+\sqrt{D}}{a} \quad \text{и} \quad \varphi' = \frac{-b-\sqrt{D}}{a},$$

гдѣ

$$D = b^2 - ac.$$

Легко убѣдиться въ томъ, что коэффиціенты приведенныхъ системъ (1) будутъ сопряженными алгебраическими числами, принадлежащими къ той же квадратичной области, что и числа φ и φ'. При этомъ, если коэффиціенты, напримѣръ, системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k \\ 1, & \varphi'_k \end{bmatrix} \tag{6}$$

удовлетворяютъ уравненію

$$a_k\rho^2+2b_k\rho+c_k=0, \tag{7}$$

то

$$\varphi_k=\frac{-b_k\pm\sqrt{D}}{a_k} \quad \text{и} \quad \varphi_k'=\frac{-b_k\mp\sqrt{D}}{a_k}, \tag{8}$$

гдѣ

$$D=b_k^2-a_kc_k$$

имѣетъ то же значеніе, что и раньше *).

Такъ какъ система (6) приведенная 1-го или 2-го рода, то на основаніи § 11 получаемъ въ 1-мъ случаѣ неравенства

$$0<\frac{-b_k\pm\sqrt{D}}{a_k}<1 \quad \text{и} \quad \frac{-b_k\mp\sqrt{D}}{a_k}<-1,$$

во 2-мъ случаѣ неравенства

$$\frac{-b_k\pm\sqrt{D}}{a_k}>1 \quad \text{и} \quad 0>\frac{-b_k\mp\sqrt{D}}{a_k}>-1.$$

На основаніи этихъ неравенствъ въ обоихъ случаяхъ находимъ

$$|b_k|<\sqrt{D}, \quad |a_k|<2\sqrt{D} \quad \text{и} \quad |c_k|<2\sqrt{D}.$$

Слѣдовательно, число различныхъ уравненій вида (7) конечно, и потому, на основаніи (8), существуетъ конечное число различныхъ системъ въ ряду (1).

Такъ же, какъ и раньше, убѣждаемся въ томъ, что этотъ рядъ состоитъ изъ періодически повторяющихся системъ

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_1\\ 1, & \varphi_1'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1, & \varphi_2\\ 1, & \varphi_2'\end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix}1, & \varphi_n\\ 1, & \varphi_n'\end{bmatrix}.$$

О подстановкахъ, не измѣняющихъ системы коваріантныхъ формъ.

§ 13.

Предположимъ, что φ и φ' сопряженныя алгебраическія числа, удовлетворяющія уравненію 2-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

Если система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi\\ 1, & \varphi'\end{bmatrix} \tag{1}$$

---

*) Cp. Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie", § 73. S. 174 (Vierte Auflage, 1894).

послѣ подстановки

$$S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{2}$$

принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \tau, & \tau\varphi \\ \tau', & \tau'\varphi' \end{bmatrix},$$

то мы говоримъ, что подстановка (2) не измѣняетъ системы (1) *).

Условимся не считать различными подстановки

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\alpha' & -\beta' \end{vmatrix}.$$

Теорема. Всѣ подстановки, не измѣняющія системы коваріантныхъ формъ (1), *могутъ быть получены возвышеніемъ въ степень одной основной подстановки.*

Предположимъ, что системѣ (1) соотвѣтствуетъ рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2' \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 1, & \varphi_n \\ 1, & \varphi_n' \end{bmatrix}, \ldots \tag{3}$$

1-го или 2-го рода, состоящій изъ n различныхъ періодически повторяющихся системъ. Обозначимъ черезъ σ_k подстановку, которая преобразуетъ систему $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k \\ 1, & \varphi_k' \end{bmatrix}$ въ систему $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+1} \\ 1, & \varphi_{k+1}' \end{bmatrix}$.

На основаніи § 11, подстановка σ_k имѣетъ видъ

$$\sigma_k = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \delta \end{vmatrix}.$$

Поэтому система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix} \tag{4}$$

послѣ подстановки σ_1 обращается въ систему

$$\begin{bmatrix} \varphi_1, & \varphi_1\varphi_2 \\ \varphi_1', & \varphi_1'\varphi_2' \end{bmatrix}.$$

Эта система послѣ подстановки σ_2 обращается въ систему

$$\begin{bmatrix} \varphi_1\varphi_2, & \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \\ \varphi_1'\varphi_2', & \varphi_1'\varphi_2'\varphi_3' \end{bmatrix}$$

*) Это опредѣленіе обусловливается особенной точкой зрѣнія на одинаковыя системы коваріантныхъ формъ, которая нами установлена въ § 10.

и т. д. Обозначимъ черезъ S подстановку равную произведенію подстановокъ

$$S = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Послѣ подстановки S система (4) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} E, & E\varphi_1 \\ E', & E'\varphi'_1 \end{bmatrix},$$

гдѣ

$$E = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n \quad \text{и} \quad E' = \varphi'_1\varphi'_2 \dots \varphi'_n. \tag{5}$$

На основаніи § 12, E и E' сопряженныя алгебраическія единицы, опредѣляемыя подстановкой S, такъ какъ подстановка S не измѣняетъ системы (4). Очевидно, что при всякомъ цѣломъ раціональномъ значеніи числа u подстановка S^u не измѣняетъ системы (4) и эта подстановка опредѣляетъ сопряженныя алгебраическія единицы E^u и $(E')^u$.

Обозначимъ черезъ Σ какую нибудь подстановку, которая не измѣняетъ системы (4). Пусть этой подстановкѣ соотвѣтствуютъ сопряженныя алгебраическія единицы e и e'.

Предположимъ для бóльшей опредѣленности, что рядъ (3) состоитъ изъ приведенныхъ системъ 1-го рода. На основаніи § 11, коэффиціенты этихъ системъ удовлетворяютъ условіямъ

$$0 < \varphi_k < 1 \quad \text{и} \quad \varphi'_k < -1. \tag{6}$$

Поэтому на основаніи равенствъ (5)

$$0 < E < 1 \quad \text{и} \quad |E'| > 1.$$

Если алгебраическая единица e не заключается въ формѣ

$$e = \pm E^u,$$

то мы можемъ опредѣлить цѣлое раціональное число u изъ условія:

$$1 > |eE^{-u}| > E. \tag{7}$$

На основаніи (5) и (6) можемъ найти въ ряду чиселъ

$$1,\ \varphi_1,\ \varphi_1\varphi_2,\ \dots,\ \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n$$

два числа

$$\varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_k \quad \text{и} \quad \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{k+1},$$

удовлетворяющихъ условію

$$\varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_k > |eE^{-u}| > \varphi_0\varphi_1 \dots \varphi_{k+1}, \tag{8}$$

гдѣ

$$0 \leqq k < n \quad \text{и} \quad \varphi_0 = 1.$$

Ни одно изъ неравенствъ (8) не можетъ обращаться въ равенство, такъ какъ если, напримѣръ,

$$\varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_k=|eE^{-u}|,$$

то въ ряду (3) системы

$$\begin{bmatrix}1, \varphi_1\\ 1, \varphi_1'\end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix}1, \varphi_{k+1}\\ 1, \varphi_{k+1}'\end{bmatrix}$$

были бы тождественны, что невозможно, если $k<n$.

Мы видѣли, что система (4) подстановкой равной произведенію подстановокъ $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k$ преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\ldots\varphi_k, \ \varphi_1\ldots\varphi_{k+1}\\ \varphi_1'\ldots\varphi_k', \ \varphi_1'\ldots\varphi_{k+1}'\end{bmatrix}.$$

Обозначимъ

$$\varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_k=\omega_k,\ \varphi_0'\varphi_1'\ldots\varphi_k'=\omega_k' \quad \text{и} \quad \varphi_0\varphi_1\ldots\varphi_{k+1}=\omega_{k+1},\ \varphi_0'\varphi_1'\ldots\varphi_{k+1}'=\omega_{k+1}'.$$

По условію

$$\begin{bmatrix}\omega_k, \ \omega_{k+1}\\ \omega_k', \ \omega_{k+1}'\end{bmatrix}$$

есть приведенная система 1-го рода, и потому системы (ω_k, ω_k') и $(\omega_{k+1}, \omega_{k+1}')$ смежныя системы въ ряду (I) послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ (4). На основаніи неравенствъ (8) и свойствъ ряда (I) (§ 5) убѣждаемся въ томъ, что система $[eE^{-u}, e'(E')^{-u}]$ значеній коваріантныхъ формъ (4) не можетъ представлять системы относительныхъ minima. Но алгебраическимъ единицамъ eE^{-u} и $e'(E')^{-u}$ соотвѣтствуетъ подстановка ΣS^{-u}, которая системы формъ (4) не измѣняетъ, и потому $[eE^{-u}, e'(E')^{-u}]$ есть система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (4). Приходимъ къ противорѣчію, и потому неравенства (7) невозможны, то есть всегда алгебраическая единица e заключается въ формѣ

$$e=\pm E^u,$$

а потому и подстановка Σ можетъ быть представлена въ видѣ

$$\Sigma=S^u.$$

Здѣсь u цѣлое раціональное число положительное или отрицательное.

Предположимъ теперь, что данная система (1) преобразуется въ систему (4) нѣкоторой подстановкой T. Не трудно убѣдиться въ томъ, что всѣ подстановки, не измѣняющія системы (8), получаются возвышеніемъ въ степень основной подстановки

$$TST^{-1}.$$

Примѣненіе алгориѳма непрерывныхъ дробей къ разысканію алгебраическихъ единицъ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня квадратнаго уравненія съ положительнымъ дискриминантомъ.

§ 14.

Предположимъ, что φ и φ' сопряженныя алгебраическія числа, удовлетворяющія квадратному уравненію съ положительнымъ дискриминантомъ. Требуется найти всѣ алгебраическія единицы вида

$$E = t + t'\varphi, \tag{1}$$

гдѣ t и t' цѣлыя раціональныя числа *).

Въ предыдущихъ параграфахъ мы видѣли, что каждая подстановка Σ, не измѣняющая системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix}, \tag{2}$$

опредѣляетъ нѣкоторую алгебраическую единицу вида (1). Такимъ способомъ могутъ получаться не всѣ алгебраическія единицы вида (1). Можетъ случиться, что алгебраической единицѣ E будетъ соотвѣтствовать подстановка Σ не съ цѣлыми коэффиціентами, а съ дробными. Этихъ случаевъ мы разсматривать не будемъ.

Мы будемъ разсматривать только такія системы коваріантныхъ формъ, коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ слѣдующему условію:

Если α и α' такія цѣлыя раціональныя числа, что $\alpha+\alpha'\varphi$ цѣлое алгебраическое число, то, какія бы значенія ни имѣли цѣлыя раціональныя числа t и t', всегда можно найти цѣлыя раціональныя числа X и X', удовлетворяющія равенству

$$(\alpha+\alpha'\varphi)(t+t'\varphi) = X + X'\varphi.$$

Напримѣръ, система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix}$$

---

*) Въ томъ случаѣ, когда $\varphi = \sqrt{D}$, вопросъ о разысканіи алгебраическихъ единицъ вида $t+t'\varphi$ сводится къ рѣшенію уравненія Pell'а: $t^2 - Dt'^2 = \pm 1$.

Еще Euler'у было извѣстно, что рѣшенія эти могутъ быть получены при помощи разложенія числа $\sqrt{D}$ въ непрерывную дробь, но только Lagrange первый доказалъ, что уравненіе $t^2 - Dt'^2 = 1$ всегда имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, и далъ форму, въ которой заключаются всѣ эти рѣшенія. См. Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae: „De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo" (T. I, p. 316) и „De resolutione irrationalium per fractiones continuas, ubi simul nova quaedam et singularis species minimi exponitur" (T. I, p. 570). Oeuvres de Lagrange: „Solution d'un problème d'arithmétique" (T. I, p. 671). „Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré" (T. II, p. 377) и „Additions aux éléments d'algèbre d'Euler" (T. VII, p. 5).

будетъ удовлетворять поставленному условію, если форма

$$X\tau + X'\tau\varphi$$

есть идеалъ *) области алгебраическихъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$X + X'\varphi.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ всякой алгебраической единицѣ вида (1) соотвѣтствуетъ подстановка Σ съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, не измѣняющая системы (2), и потому, на основаніи § 13, всякая алгебраическая единица e, принадлежащая къ разсматриваемой области, можетъ быть представлена въ видѣ

$$e = \pm E^{n}.$$

Для полученія основной единицы E можно поступать слѣдующимъ образомъ. Нужно опредѣлить періодъ различныхъ приведенныхъ системъ 1-го или 2-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 1, & \varphi_n \\ 1, & \varphi_n' \end{bmatrix}$$

эквивалентныхъ данной системѣ. Обозначивъ

$$E = \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n \quad \text{и} \quad E' = \varphi_1'\varphi_2'\dots\varphi_n',$$

получимъ сопряженныя основныя единицы E и E'.

Объ идеалахъ, принадлежащихъ къ области чиселъ, зависящихъ отъ корня квадратнаго уравненія съ положительнымъ дискриминантомъ.

§ 15.

Предположимъ, что

$$X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad X\lambda_1 + X'\mu_1$$

идеалы, принадлежащіе къ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня квадратнаго уравненія съ положительнымъ дискриминантомъ.

Dedekind называетъ **) идеалы

$$X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad X\lambda_1 + X'\mu_1 \qquad (1)$$

эквивалентными, если существуетъ алгебраическое число τ цѣлое или дробное, принадлежащее къ той же области, что и идеалы (1), послѣ

*) См. Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie", § 177. S. 550 (Vierte Auflage, 1894).

**) Тамъ-же: § 181. S. 573.

умноженія на которое одинъ идеалъ дѣлается тождественнымъ съ другимъ. Поэтому, если идеалы (1) эквивалентны, то идеалы

$$X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad X\lambda_1\tau + X'\mu_1\tau$$

тождествены, т. е. существуетъ подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая преобразуетъ линейную форму $X\lambda + X'\mu$ въ форму $X\tau\lambda_1 + X'\tau\mu_1$.

Обозначимъ числа сопряженныя съ λ, μ, λ_1 и μ_1 соотвѣтственно черезъ λ', μ', λ_1' и μ_1'. Составимъ системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1, & \mu_1 \\ \lambda_1', & \mu_1' \end{bmatrix}, \tag{2}$$

соотвѣтствующія идеаламъ (1).

Если системы коваріантныхъ формъ (2) эквивалентны, то идеалы (1) эквивалентны, и наоборотъ.

Мы показали раньше (§ 11), какъ примѣняется алгориѳмъ непрерывныхъ дробей къ рѣшенію вопроса о томъ, эквивалентны ли данныя системы коваріантныхъ формъ или нѣтъ. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, рѣшивъ этотъ вопросъ, мы узнаемъ также, эквивалентны ли идеалы, соотвѣтствующіе этимъ системамъ формъ.

Мы ограничиваемся этими указаніями на приложенія алгориѳма непрерывныхъ дробей къ теоріи алгебраическихъ чиселъ квадратичной области. Въ слѣдующихъ отдѣлахъ настоящаго сочиненія мы покажемъ, какъ примѣняются къ рѣшенію соотвѣтствующихъ вопросовъ теоріи алгебраическихъ чиселъ кубической области предлагаемые нами алгориѳмы, при помощи которыхъ опредѣляются послѣдовательные относительные minima системъ коваріантныхъ формъ съ тремя перемѣнными.

ОТДѢЛЪ II.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ
$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i)$$
при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

О системѣ коваріантныхъ формъ
$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}.$$

§ 16.

Въ этомъ отдѣлѣ мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i), \qquad (1)$$

коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

1) λ, μ и ν дѣйствительныя числа, $l'+l''i$, $m'+m''i$ и $n'+n''i$ комплексныя числа;

2) опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = \varkappa$$

не равенъ нулю;

3) система (λ, μ, ν) неприводимая;

4) при раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X, X' и X'' равенство

$$|t(l'+l''i) + t'(m'+m''i) + t''(n'+n''i)| = |t_1(l'+l''i) + t'_1(m'+m''i) + t''_1(n'+n''i)|,$$

въ которомъ знакъ $| \, |$ обозначаетъ модуль комплекснаго числа, возможно только тогда, когда

$$t = \pm t_1, \quad t' = \pm t'_1 \quad \text{и} \quad t'' = \pm t''_1.$$

Знакъ $\pm$ для всѣхъ трехъ равенствъ имѣетъ одно и то же значеніе.

Мы будемъ обозначать символомъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}$$

систему коваріантныхъ формъ (1).

На эти системы формъ можно распространить всѣ опредѣленія, предложенныя нами въ отдѣлѣ I для разсмотрѣнныхъ тамъ системъ формъ. Въ слѣдующихъ параграфахъ мы только формулируемъ эти опредѣленія и перечисляемъ слѣдствія, изъ нихъ вытекающія.

Относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 17.

Опредѣленіе. Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X, X' и X'' коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i) \tag{1}$$

получаютъ такія значенія ω_0 и ω'_0, что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t, t' и t'', которыя удовлетворяли бы одновременно неравенствамъ

$$|t\lambda + t'\mu + t''\nu| < |\omega_0| \quad \text{и} \quad |t(l'+l''i) + t'(m'+m''i) + t''(n'+n''i)| < |\omega'_0|.$$

Такія числа ω_0 и ω'_0 условимся называть относительными minima'ми системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Значенія коваріантныхъ формъ (1) *равныя нулю исключаются изъ разсмотрѣнія.*

Изъ двухъ системъ (ω, ω') и $(-\omega, -\omega')$ значеній коваріантныхъ формъ (1) условимся разсматривать первую, если $\omega > 0$, и вторую, если $\omega < 0$.

§ 18.

Обозначимъ черезъ (S) совокупность всѣхъ системъ (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (1), представляющихъ относительные minima.

Лемма I. *Къ совокупности (S) принадлежитъ конечное число системъ, модули элементовъ которыхъ меньше данныхъ чиселъ ε и ε'.*

Лемма II. *Если система (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ*

(1) *не принадлежитъ къ совокупности* (S), *то среди системъ совокупности* (S) *можно найти систему* (ω_k, ω'_k), *модули элементовъ которой меньше чиселъ* $|\omega|$ и $|\omega'|$.

Лемма III. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ безчисленное множество системъ, первый элементъ которыхъ меньше даннаго числа* ε, *и безчисленное множество системъ, модуль второго элемента которыхъ меньше* ε'.

Лемма эта можетъ быть доказана такъ же, какъ и соотвѣтствующая лемма § 3, если только будетъ доказано, что всегда можно найти цѣлыя числа t, t' и t'', удовлетворяющія неравенству

$$0 < t\lambda + t'\mu + t''\nu < \varepsilon,$$

и числа, удовлетворяющія неравенству

$$|t(l'+l''i) + t'(m'+m''i) + t''(n'+n''i)| < \varepsilon'.$$

Принимая во вниманіе условія § 16, въ существованіи такихъ чиселъ убѣждаемся на основаніи принципа Dirichlet*).

Лемма IV. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ безчисленное множество системъ, первый элементъ которыхъ не меньше даннаго числа* ε, *и безчисленное множество системъ, модуль второго элемента которыхъ не меньше* ε'.

Лемма V. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ конечное число системъ, первый элементъ которыхъ не меньше даннаго числа* ε, *но меньше* ε_1, *и конечное число системъ, модуль второго элемента которыхъ не меньше* ε', *но меньше* ε'_1.

О смежныхъ системахъ совокупности (S).

§ 19.

Опредѣленіе. *Если система* (ω_0, ω'_0) *принадлежитъ къ совокупности* (S), *то всегда можно найти только одну систему* (ω_1, ω'_1) *значеній коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i), \qquad (1)$$

модули элементовъ которой удовлетворяютъ слѣдующимъ 2-мъ условіямъ:

1) $$0 < \omega_1 < \omega_0;$$

*) См. Lejeune Dirichlet: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen" (Werke, Bd. I, S. 633).

2) *ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* t, t' *и* t'' *неравенства*

$$|t\lambda+t'\mu+t''\nu| < \omega_0 \quad \text{и} \quad |t(l'+l''i)+t'(m'+m''i)+t''(n'+n''i)| < |\omega'_1|$$

не могутъ существовать одновременно.

Система (ω_1, ω'_1) *принадлежитъ къ совокупности* (S), *и эту систему мы называемъ первой системой смежной съ системой* (ω_0, ω'_0).

Всегда можно найти только одну систему $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ *значеній коваріантныхъ формъ* (1), *удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ:*

1) $$|\omega'_{-1}| < |\omega'_0|;$$

2) *ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* t, t' *и* t'' *неравенства*

$$|t\lambda+t'\mu+t''\nu| < \omega_{-1} \quad \text{и} \quad |t(l'+l''i)+t'(m'+m''i)+t''(n'+n''i)| < |\omega'_0|$$

не могутъ существовать одновременно.

Система $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ *принадлежитъ къ совокупности* (S), *и эту систему мы называемъ второй системой смежной съ системой* (ω_0, ω'_0).

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ:

1. *Если* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k), *то система* (ω_k, ω'_k) *есть вторая система смежная съ системой* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$.

2. *Если* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k), *а* (ω, ω') *какая нибудь другая система значеній коваріантныхъ формъ* (1), *то при существованіи неравенства*

$$|\omega| < \omega_k$$

должно существовать неравенство

$$|\omega'| > |\omega'_{k+1}|.$$

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 20.

Пусть (ω_0, ω'_0) какая нибудь система, принадлежащая къ совокупности (S). Найдемъ первую систему смежную съ (ω_0, ω'_0). Пусть эта система (ω_1, ω'_1). Найдемъ первую смежную съ ней систему (ω_2, ω'_2) и т. д. Получимъ безконечный рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ (\omega_2, \omega'_2),\ \ldots \qquad (1)$$

Къ этому ряду принадлежатъ всѣ системы совокупности (S), первый элементъ которыхъ меньше перваго элемента системы (ω_0, ω'_0).

Найдемъ далѣе вторую систему смежную съ системой (ω_0, ω'_0). Пусть эта система $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$. Затѣмъ найдемъ вторую смежную съ ней систему $(\omega_{-2}, \omega'_{-2})$ и т. д. Получимъ безконечный рядъ системъ:

$$(\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_{-1}, \omega'_{-1}),\ (\omega_{-2}, \omega'_{-2}),\ \ldots \tag{2}$$

Къ ряду (2) принадлежатъ всѣ системы совокупности (S), первый элементъ которыхъ больше перваго элемента системы (ω_0, ω'_0).

Ряды (1) и (2) соединяемъ въ одинъ безконечный рядъ

$$\ldots (\omega_{-2}, \omega'_{-2}),\ (\omega_{-1}, \omega'_{-1}),\ (\omega_0, \omega'_0),\ (\omega_1, \omega'_1),\ (\omega_2, \omega'_2),\ \ldots \tag{I}$$

Рядъ (I) *мы называемъ рядомъ послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad и \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i). \tag{3}$$

Этотъ рядъ обладаетъ слѣдующими свойствами:

1. *Рядъ* (I) *можно продолжать сколь угодно далеко, какъ вправо такъ и влѣво отъ каждаго члена ряда.*

2. *Модули элементовъ системъ ряда* (I) *удовлетворяютъ неравенствамъ*

$$\left.\begin{array}{l} \cdots > \omega_{-2} > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \omega_2 > \cdots \\ \cdots < |\omega'_{-2}| < |\omega'_{-1}| < |\omega'_0| < |\omega'_1| < |\omega'_2| < \cdots \end{array}\right\}.$$

3. *Каждый членъ ряда* (I) *есть система значеній коваріантныхъ формъ* (3), *принадлежащая къ совокупности* (S), *и наоборотъ каждая система совокупности* (S) *принадлежитъ къ ряду* (I).

4. *Изъ двухъ рядомъ стоящихъ системъ* (ω_k, ω'_k) *и* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *ряда* (I) *система* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$ *есть первая система смежная съ системой* (ω_k, ω'_k); *наоборотъ* (ω_k, ω'_k) *есть вторая система смежная съ системой* $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$.

5. *Если подстановка*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

преобразуетъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}$$

въ эквивалентную ей систему

$$\begin{bmatrix} \lambda_1\ , & \mu_1\ , & \nu_1 \\ l'_1+l''_1 i, & m'_1+m''_1 i, & n'_1+n''_1 i \end{bmatrix}, \tag{4}$$

то рядъ послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ (4) *тождественъ съ рядомъ* (I).

О значеніяхъ перемѣнныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 21.

Основная теорема. *Если системы* (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i) + X'(m'+m''i) + X''(n'+n''i) \qquad (1)$$

при значеніяхъ перемѣнныхъ

$$X = p_0,\ X' = p'_0,\ X'' = p''_0 \quad \text{и} \quad X = p_1,\ X' = p'_1,\ X'' = p''_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ системой* (ω_0, ω'_0), *то числа*

$$p'_0 p''_1 - p''_0 p'_1,\ p''_0 p_1 - p_0 p''_1 \quad \text{и} \quad p_0 p'_1 - p'_0 p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя.

Такъ же, какъ и въ § 6, убѣждаемся, что числа p_0, p'_0 и p''_0 не имѣютъ общаго дѣлителя, если только система (ω_0, ω'_0) представляетъ относительные minima значеній коваріантныхъ формъ (1). Поэтому числа

$$p'_0 p''_1 - p''_0 p'_1,\ p''_0 p_1 - p_0 p''_1 \quad \text{и} \quad p_0 p'_1 - p'_0 p_1$$

не могутъ быть равны нулю одновременно. Предположимъ, что они имѣютъ общимъ дѣлителемъ число $e > 1$.

Между тремя парами чиселъ:

$$p_0 \text{ и } p_1,\quad p'_0 \text{ и } p'_1,\quad p''_0 \text{ и } p''_1$$

по крайней мѣрѣ одна, напримѣръ p_0 и p_1, не будетъ имѣть общимъ дѣлителемъ число e. Такъ какъ по условію

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= p_0\lambda + p'_0\mu + p''_0\nu, & \omega_1 &= p_1\lambda + p'_1\mu + p''_1\nu \\ \omega'_0 &= p_0(l'+l''i) + p'_0(m'+m''i) + p''_0(n'+n''i), & \omega'_1 &= p_1(l'+l''i) + p'_1(m'+m''i) + p''_1(n'+n''i) \end{aligned}\right\},$$

то будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} p_1\omega_0 - p_0\omega_1 &= -(p_0p'_1 - p'_0p_1)\mu + (p''_0p_1 - p_0p''_1)\nu \\ p_1\omega'_0 - p_0\omega'_1 &= -(p_0p'_1 - p'_0p_1)(m'+m''i) + (p''_0p_1 - p_0p''_1)(n'+n''i) \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Полагая

$$p_0 = et_0 + r_0 \quad \text{и} \quad p_1 = et_1 + r_1,$$

гдѣ

$$|r_0| \leqq \tfrac{1}{2}e \quad \text{и} \quad |r_1| \leqq \tfrac{1}{2}e, \qquad (3)$$

мы на основаніи равенствъ (2) найдемъ

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_1\omega_0-r_0\omega_1}{e}&=h\lambda+h'\mu+h''\nu\\ \frac{r_1\omega_0'-r_0\omega_1'}{e}&=h(l'+l''i)+h'(m'+m''i)+h''(n'+n''i)\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Здѣсь h, h' и h'' цѣлыя раціональныя числа. На основаніи неравенствъ (3) получимъ

$$\left.\begin{aligned}|h\lambda+h'\mu+h''\nu|&\leqq\tfrac{1}{2}\omega_0+\tfrac{1}{2}\omega_1\\ |h(l'+l''i)+h'(m'+m''i)+h''(n'+n''i)|&\leqq\tfrac{1}{2}|\omega_0'|+\tfrac{1}{2}|\omega_1'|\end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

По условію (ω_1, ω_1') — первая система смежная съ системой (ω_0, ω_0'); поэтому, на основаніи § 19,

$$\omega_1<\omega_0 \quad \text{и} \quad |\omega_1'|>|\omega_0'|.$$

На основаніи неравенствъ (5) получаемъ

$$|h\lambda+h'\mu+h''\nu|<\omega_0 \quad \text{и} \quad |h(l'+l''i)+h'(m'+m''i)+h''(n'+n''i)|<|\omega_1'|.$$

Мы видѣли (§ 19, слѣдствіе 2), что эти неравенства не могутъ существовать одновременно, если числа h, h' и h'' не равны нулю. Но, если $h=h'=h''=0$, то на основаніи равенствъ (4) получимъ

$$r_1\omega_0-r_0\omega_1=0 \quad \text{и} \quad r_1\omega_0'-r_0\omega_1'=0.$$

Мы предполагаемъ, что числа r_0 и r_1 не равны нулю одновременно, и потому эти равенства невозможны. Теорема такимъ образомъ доказана.

Приведенныя системы коваріантныхъ формъ.

§ 22.

Опредѣленіе. *Систему коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix}\lambda, & \mu, & \nu\\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i\end{bmatrix} \qquad (1)$$

называемъ приведенной системой 1-го рода, если $(\lambda, l'+l''i)$ *и* $(\mu, m'+m''i)$ *относительные minima значеній коваріантныхъ формъ* (1) *и при томъ* $(\mu, m'+m''i)$ *есть первая система смежная съ* $(\lambda, l'+l''i)$.

Систему формъ (1) *называемъ приведенной системой 2-го рода, если* $(\mu, m'+m''i)$ *есть вторая система смежная съ системой* $(\lambda, l'+l''i)$.

Составимъ рядъ (I) (§ 20)

$$\ldots(\omega_{-1}, \omega_{-1}'), (\omega_0, \omega_0'), (\omega_1, \omega_1'), \ldots \qquad (I)$$

послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ (1).

Пусть (ω_0, ω_0') и (ω_1, ω_1') двѣ какія нибудь смежныя системы этого ряда. Сохраняя обозначенія § 21, полагаемъ

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_0 = p_0\lambda + p_0'\mu + p_0''\nu\ , & \omega_1 = p_1\lambda + p_1'\mu + p_1''\nu \\ \omega_0' = p_0(l'+l''i) + p_0'(m'+m''i) + p_0''(n'+n''i), & \omega_1' = p_1(l'+l''i) + p_1'(m'+m''i) + p_1''(n'+n''i) \end{array}\right\}.$$

Мы доказали, что числа

$$p_0'p_1'' - p_0''p_1', \quad p_0''p_1 - p_0p_1'' \quad \text{и} \quad p_0p_1' - p_0'p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя. Поэтому можно найти цѣлыя раціональныя числа q_0, q_0', q_0'', удовлетворяющія равенству

$$(p_0'p_1'' - p_0''p_1')q_0 + (p_0''p_1 - p_0p_1'')q_0' + (p_0p_1' - p_0'p_1)q_0'' = \pm 1.$$

Система коваріантныхъ формъ (1) подстановкой

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & q_0 \\ p_0' & p_1' & q_0' \\ p_0'' & p_1'' & q_0'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

преобразуется въ эквивалентную ей приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1, & \nu_0 \\ \omega_0', & \omega_1', & \nu_0' \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Здѣсь

$$\nu_0 = q_0\lambda + q_0'\mu + q_0''\nu \quad \text{и} \quad \nu_0' = q_0(l'+l''i) + q_0'(m'+m''i) + q_0''(n'+n''i).$$

Если систему (2) преобразовать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1,$$

то, какія бы значенія ни имѣли цѣлыя раціональныя числа ε и δ, всегда полученная система

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1, & \nu_1 \\ \omega_0', & \omega_1', & \nu_1' \end{bmatrix} \tag{3}$$

будетъ приведенной системой 1-го рода.

Мы условимся не считать различными эквивалентныя системы коваріантныхъ формъ (2) и (3).

Такимъ образомъ мы можемъ получить безконечный рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\cdots \begin{bmatrix} \omega_{-1}, & \omega_0, & \nu_{-1} \\ \omega_{-1}', & \omega_0', & \nu_{-1}' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1, & \nu_0 \\ \omega_0', & \omega_1', & \nu_0' \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \nu_1 \\ \omega_1', & \omega_2', & \nu_1' \end{bmatrix}, \cdots \tag{4}$$

Всѣ приведенныя системы 1-го рода эквивалентныя системѣ кова-

ріантныхъ формъ (1) находятся въ этомъ ряду. Каждая система формъ, принадлежащая къ ряду (4), преобразуется въ слѣдующую за ней систему подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad (5)$$

Подобнымъ же образомъ получимъ рядъ приведенныхъ системъ 2-го рода

$$\dots \begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_0, & \nu_0 \\ \omega'_1, & \omega'_0, & \nu'_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_{-1}, & \nu_{-1} \\ \omega'_0, & \omega'_{-1}, & \nu'_{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{-1}, & \omega_{-2}, & \nu_{-2} \\ \omega'_{-1}, & \omega'_{-2}, & \nu'_{-2} \end{bmatrix}, \dots \qquad (6)$$

Всѣ приведенныя системы 2-го рода эквивалентныя системѣ (1) находятся въ этомъ ряду. Каждая система формъ, принадлежащая къ ряду (6), преобразуется въ слѣдующую за ней систему подстановкой вида (5).

Эквивалентныя системы коваріантныхъ формъ.

§ 23.

Условимся не считать различными системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \tau\lambda, & \tau\mu, & \tau\nu \\ \tau'(l'+l''i), & \tau'(m'+m''i), & \tau'(n'+n''i) \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

какія бы значенія ни имѣли: дѣйствительное число τ и комплексное число τ'.

Системы коваріантныхъ формъ (1) мы будемъ замѣнять системой

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix},$$

гдѣ

$$\varphi = \frac{\mu}{\lambda}, \quad \psi = \frac{\nu}{\lambda} \quad \text{и} \quad a+bi = \frac{m'+m''i}{l'+l''i}, \quad c+di = \frac{n'+n''i}{l'+l''i}.$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить, что, производя такую замѣну, мы приводимъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}$$

къ нормальному виду

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}.$$

Соотвѣтственно съ этой новой точкой зрѣнія на одинаковыя систе-

мы коваріантныхъ формъ мы расширяемъ понятіе объ эквивалентныхъ системахъ коваріантныхъ формъ.

Опредѣленіе. Мы называемъ системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \lambda_1\ , & \mu_1\ , & \nu_1 \\ l'_1+l''_1 i, & m'_1+m''_1 i, & n'_1+n''_1 i \end{bmatrix} \qquad (2)$$

эквивалентными, если существуетъ подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

съ цѣлыми раціональными коэффиціентами, которая одну изъ этихъ системъ, напримѣръ первую, преобразовываетъ въ систему

$$\begin{bmatrix} \tau\lambda_1\ , & \tau\mu_1\ , & \tau\nu_1 \\ \tau'(l'_1+l''_1 i), & \tau'(m'_1+m''_1 i), & \tau'(n'_1+n''_1 i) \end{bmatrix}.$$

§ 24.

Предположимъ, что система

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1, & \nu_0 \\ \omega'_0, & \omega'_1, & \nu'_0 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

какая нибудь приведенная система 1-го рода эквивалентная данной системѣ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\ , & \mu\ , & \nu \\ l'+l''i, & m'+m''i, & n'+n''i \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Система (3) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (5)$$

преобразуется въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \nu_1 \\ \omega'_1, & \omega'_2, & \nu'_1 \end{bmatrix}$$

и т. д. Такимъ образомъ можно получить безконечный рядъ

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_1, & \nu_0 \\ \omega'_0, & \omega'_1, & \nu'_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_1, & \omega_2, & \nu_1 \\ \omega'_1, & \omega'_2, & \nu'_1 \end{bmatrix}, \ldots \qquad (6)$$

приведенныхъ системъ 1-го рода эквивалентныхъ системѣ коваріантныхъ формъ (4).

Приводимъ всѣ системы формъ ряда (6) къ нормальному виду. Получимъ рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \;, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \;, & \psi_2 \\ 1, & a_2+b_2 i, & c_2+d_2 i \end{bmatrix}, \dots \qquad (7)$$

Коэффиціенты системъ этого ряда опредѣляются равенствами

$$\left.\begin{matrix} \omega_1 = \omega_0\varphi_1 \;, & \omega_2 = \omega_1\varphi_2 \;, & \omega_3 = \omega_2\varphi_3 \;, \dots \\ \omega_1' = \omega_0'(a_1+b_1 i), & \omega_2' = \omega_1'(a_2+b_2 i), & \omega_3' = \omega_2'(a_3+b_3 i), \dots \end{matrix}\right\},$$

и слѣдовательно

$$\left.\begin{matrix} \omega_1 = \omega_0\varphi_1 \;, \; \omega_2 = \omega_0\varphi_1\varphi_2 \;, \; \omega_3 = \omega_0\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \;, \dots \\ \omega_1' = \omega_0'(a_1+b_1 i), \; \omega_2' = \omega_0'(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i), \; \omega_3' = \omega_0'(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)(a_3+b_3 i), \dots \end{matrix}\right\}.$$

Такъ какъ системы формъ, принадлежащія къ ряду (7), приведенныя—1-го рода, то, на основаніи §§ 22, и 19 коэффиціенты этихъ системъ удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$0 < \varphi_k < 1 \quad \text{и} \quad |a_k+b_k i| > 1, \quad (k=1,2,3,\dots).$$

Каждая система ряда (7) преобразуется въ слѣдующую за ней систему подстановкой вида (5). Мы это преобразованіе будемъ производить слѣдующимъ образомъ. Напримѣръ, систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k \;, & \psi_k \\ 1, & a_k+b_k i, & c_k+d_k i \end{bmatrix} \qquad (8)$$

преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученную систему

$$\begin{bmatrix} \varphi_k \;, & \psi_k \;, & 1 \\ a_k+b_k i, & c_k+d_k i, & 1 \end{bmatrix}$$

приведемъ къ нормальному виду и подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (9)$$

преобразуемъ въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+1} \;, & \psi_{k+1} \\ 1, & a_{k+1}+b_{k+1} i, & c_{k+1}+d_{k+1} i \end{bmatrix},$$

которая слѣдуетъ въ ряду (7) за системой (8), и т. д.

Замѣтимъ, что если коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{10}$$

какія угодно числа, ограниченныя только условіями, поставленными въ § 16, то можетъ случиться, что нельзя найти подстановки вида (9), которая систему (10) преобразовала бы въ приведенную систему 1-го рода.

На основаніи теоремы § 21 убѣждаемся въ томъ, что система коваріантныхъ формъ (10) можетъ быть преобразована подстановкой вида (9) въ приведенную систему 1-го рода только тогда, когда система (1, 1) представляетъ относительные minima значеній коваріантныхъ формъ (10). Поэтому, если будутъ найдены какія нибудь цѣлыя раціональныя числа t, t' и t'', удовлетворяющія одновременно неравенствамъ

$$|t+t'\varphi+t''\psi|<1 \quad \text{и} \quad |t+t'(a+bi)+t''(c+di)|<1, \tag{11}$$

то система формъ (10), на основаніи § 17, не можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида (9). Если же будетъ доказано, что неравенства (11) не могутъ существовать одновременно ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ t, t' и t'', то система (1, 1) представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ (10).

Для того, чтобы въ этомъ случаѣ опредѣлить коэффиціенты подстановки (9), нужно, на основаніи §§ 22 и 19, найти прежде всего цѣлыя раціональныя числа p, p' и p'', удовлетворяющія условіямъ:

1) $$0<p+p'\varphi+p''\psi<1;$$

2) ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ t, t' и t'' неравенства

$$|t+t'\varphi+t''\psi|<1 \quad \text{и} \quad |t+t'(a+bi)+t''(c+di)|<|p+p'(a+bi)+p''(c+di)|$$

не могутъ существовать одновременно.

Числа q, q' и q'' опредѣляются только условіемъ, что опредѣлитель подстановки (9) по численной величинѣ равенъ единицѣ.

Начиная съ какой нибудь приведенной системы 2-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_{-1}, & \nu_{-1} \\ \omega'_0, & \omega'_{-1}, & \nu'_{-1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

при помощи подстановокъ вида

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 1 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

составимъ безконечный рядъ приведенныхъ системъ 2-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_0, & \omega_{-1}, & \nu_{-1} \\ \omega'_0, & \omega'_{-1}, & \nu'_{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \omega_{-1}, & \omega_{-2}, & \nu_{-2} \\ \omega'_{-1}, & \omega'_{-2}, & \nu'_{-2} \end{bmatrix}, \ldots \tag{13}$$

Если всѣ системы этого ряда приведемъ къ нормальному виду, то получимъ безконечный рядъ приведенныхъ системъ 2-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{-1}, & \psi_{-1} \\ 1, & a_{-1}+b_{-1}i, & c_{-1}+d_{-1}i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{-2}, & \psi_{-2} \\ 1, & a_{-2}+b_{-2}i, & c_{-2}+d_{-2}i \end{bmatrix}, \ldots \tag{14}$$

коэффиціенты которыхъ опредѣляются равенствами

$$\left.\begin{aligned} \omega_{-1} &= \omega_0\varphi_{-1}, & \omega_{-2} &= \omega_0\varphi_{-1}\varphi_{-2}, \ldots \\ \omega'_{-1} &= \omega'_0(a_{-1}+b_{-1}i), & \omega'_{-2} &= \omega'_0(a_{-1}+b_{-1}i)(a_{-2}+b_{-2}i), \ldots \end{aligned}\right\}$$

и удовлетворяютъ условіямъ

$$\varphi_{-k} > 1 \quad \text{и} \quad |a_{-k}+b_{-k}i| < 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Каждую систему ряда (14) мы можемъ преобразовать въ слѣдующую за ней систему сначала подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

а затѣмъ подстановкой вида (9):

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{9}$$

Такимъ образомъ задача преобразованія какой нибудь системы ряда (14) въ слѣдующую за ней систему сводится къ опредѣленію подстановки (9), которая систему формъ (10) преобразуетъ въ приведенную систему 2-го рода.

Такая подстановка можетъ существовать только тогда, когда система (1, 1) представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ (10). Въ этомъ случаѣ коэффиціенты подстановки p, p' и p'' опредѣляются слѣдующими условіями:

1) $\quad |p+p'(a+bi)+p''(c+di)| < 1$ и $p+p'\varphi+p''\psi > 0$;

2) ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ t, t' и t'' неравенства

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < p+p'\varphi+p''\psi \quad \text{и} \quad |t+t'(a+bi)+t''(c+di)| < 1$$

не могутъ существовать одновременно.

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы устанавливаемъ алгориѳмъ, при помощи котораго опредѣляются коэффиціенты подстановки (9).

Вспомогательное преобразованіе системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}.$$

§ 25.

Лемма. *Каждая система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \qquad (1)$$

можетъ быть преобразована подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ эквивалентную ей систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix},$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ слѣдующимъ 4 условіямъ:

1) *опредѣлитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 & d_1 \end{vmatrix} = \varkappa_1$$

число положительное;

2) *положительная бинарная квадратичная форма*

$$[(a_1-\varphi_1)X'+(c_1-\psi_1)X'']^2+[b_1X'+d_1X'']^2 = A_1X'^2+2B_1X'X''+C_1X''^2$$

приведенная *), *т. е.*

$$A_1-B_1 \geqq 0, \quad B_1 \geqq 0 \quad \textit{и} \quad C_1-B_1 \geqq 0;$$

3) $$b_1 \geqq 0 \quad \textit{и} \quad d_1 \leqq 0;$$

4) $$0 < \varphi_1 < 1 \quad \textit{и} \quad 0 < \psi_1 < 1.$$

---

*) E. Selling называетъ положительную квадратичную форму (A, B, C) приведенной, если коэффиціенты ея удовлетворяютъ условіямъ:

$$A+B \geqq 0, \quad B \leqq 0 \quad \text{и} \quad C+B \geqq 0.$$

См. E. Selling: „Ueber die binären und ternären quadratischen Formen" (Journal für Mathematik. Bd. 77, S. 143).

Мы называемъ форму (A, B, C) приведенной, когда коэффиціенты ея удовлетворяютъ условіямъ:

$$A-B \geqq 0, \quad B \geqq 0 \quad \text{и} \quad C-B \geqq 0.$$

Если данная система коваріантныхъ формъ 1-му условію не удовлетворяетъ, то подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

приводитъ систему къ желаемому виду. Поэтому въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ предполагать, что система формъ (1) удовлетворяетъ 1-му условію леммы. Мы можемъ затѣмъ преобразовать систему (1) какой угодно подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1,$$

полученная система будетъ удовлетворять 1-му условію леммы.

Обозначимъ символомъ (A, B, C) квадратичную форму

$$[(a-\varphi)X'+(c-\psi)X'']^2+[bX'+dX'']^2 = AX'^2+2BX'X''+CX''^2.$$

Здѣсь

$$A=(a-\varphi)^2+b^2, \quad B=(a-\varphi)(c-\psi)+bd \quad \text{и} \quad C=(c-\psi)^2+d^2. \tag{2}$$

Опредѣлитель квадратичной формы (A, B, C) равенъ

$$D = -[(a-\varphi)d-(c-\psi)b]^2.$$

По условію

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = \varkappa,$$

или

$$\varkappa = (a-\varphi)d-(c-\psi)b; \tag{3}$$

слѣдовательно

$$D = -\varkappa^2.$$

Въ томъ случаѣ, когда B число отрицательное, форму (A, B, C) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix},$$

получимъ форму $(C, -B, A)$. Дальнѣйшія преобразованія мы будемъ производить надъ формой (A, B, C), предполагая, что $B \geqq 0$.

Если коэффиціенты формы (A, B, C) не удовлетворяютъ условіямъ:

$$A-B \geqq 0 \quad \text{и} \quad C-B \geqq 0,$$

то форму преобразуемъ:

подстановкой $\begin{vmatrix} 1 & -\delta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, если $A < C$, и подстановкой $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\delta & 1 \end{vmatrix}$, если $C < A$.

Въ первомъ случаѣ цѣлое положительное число δ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$0 \leqq B - \delta A < A,$$

во второмъ случаѣ — изъ неравенствъ

$$0 \leqq B - \delta C < C.$$

Повторяя такое преобразованіе нѣсколько разъ, мы всегда получимъ приведенную форму (A_1, B_1, C_1). Эта форма каждой изъ шести подстановокъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

преобразуется въ приведенную форму. Такимъ образомъ получимъ три приведенныхъ формы

$$(A_1, B_1, C_1), \quad (A_1 - 2B_1 + C_1, A_1 - B_1, A_1) \text{ и } (C_1, C_1 - B_1, A_1 - 2B_1 + C_1). \qquad (5)$$

Предположимъ, что форма (A, B, C) подстановкой

$$\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1 \qquad (6)$$

преобразуется въ приведенную форму (A_1, B_1, C_1).

Линейная форма

$$X'b + X''d$$

подстановкой (6) приводится къ виду

$$X'b_1 + X''d_1,$$

гдѣ

$$b_1 = \beta' b + \beta'' d \quad \text{и} \quad d_1 = \gamma' b + \gamma'' d. \qquad (7)$$

Если окажется, что $b_1 \geqq 0$ и $d_1 \leqq 0$, то 3-мъ первымъ условіямъ леммы будетъ удовлетворять система формъ, которая получается изъ системы (1) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1.$$

Но если числа b_1 и d_1 не удовлетворяютъ 3-му условію леммы, то изъ шести паръ чиселъ

$$(b_1, d_1), \ (-b_1, -d_1), \ (b_1 - d_1, b_1), \ (-b_1 + d_1, -b_1), \ (d_1, -b_1 + d_1), \ (-d_1, b_1 - d_1),$$

соотвѣтствующихъ подстановкамъ (4), одна пара непремѣнно будетъ удовлетворять 3-му условію леммы. Слѣдовательно, всегда можно найти подстановку (6), которая преобразуетъ форму (A, B, C) въ приведенную форму (A_1, B_1, C_1), при чемъ числа b_1 и d_1, опредѣляемыя равенствами (7), будутъ удовлетворять условіямъ

$$b_1 \geqq 0 \quad \text{и} \quad d_1 \leqq 0.$$

Въ системѣ коваріантныхъ формъ (1) дѣлаемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1. \tag{8}$$

Цѣлыя раціональныя числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$0 < \beta+\beta'\varphi+\beta''\phi < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \gamma+\gamma'\varphi+\gamma''\phi < 1.$$

Подстановка (8) преобразуетъ систему (1) въ систему, которая удовлетворяетъ всѣмъ 4-мъ условіямъ леммы.

Замѣчаніе. *Если система коваріантныхъ формъ* (1) *удовлетворяетъ условіямъ леммы и существуютъ неравенства*

$$|a+bi| > 1 \quad \text{и} \quad |c+di| > 1, \tag{9}$$

то

$$b < \varkappa \quad \text{и} \quad -d < \varkappa.$$

На основаніи равенствъ (2) и (3) получаемъ

$$-A\frac{d}{\varkappa} + B\frac{b}{\varkappa} = \varphi - a \quad \text{и} \quad -B\frac{d}{\varkappa} + C\frac{b}{\varkappa} = \phi - c. \tag{10}$$

Изъ этихъ равенствъ на основаніи условій леммы выводимъ

$$\varphi - a \geqq 0 \quad \text{и} \quad \phi - c \geqq 0. \tag{11}$$

Если одно изъ чиселъ $\frac{b}{\varkappa}$ и $-\frac{d}{\varkappa}$ не меньше единицы, то на основаніи равенствъ (10) найдемъ:

$$\text{или} \quad A \leqq \varphi - a, \quad \text{или} \quad C \leqq \phi - c.$$

Предположимъ сначала, что

$$A \leqq \varphi - a. \tag{12}$$

На основаніи равенствъ (2) и неравенства (12) получимъ

$$A \leqq 1. \tag{13}$$

Равенство

$$A = (a-\varphi)^2 + b^2$$

замѣняемъ слѣдующимъ:

$$a^2+b^2=A+\varphi(2a-\varphi). \tag{14}$$

Такъ какъ изъ неравенствъ (9) слѣдуетъ

$$a^2+b^2>1 \quad \text{и} \quad c^2+d^2>1,$$

то, на основаніи неравенства (13) и 4-го условія леммы, будетъ

$$2a-\varphi>0. \tag{15}$$

Изъ равенства (14), на основаніи (12), слѣдуетъ

$$a^2+b^2 \leqq \varphi-a+2a\varphi-\varphi^2,$$

или

$$a^2+b^2 \leqq (1-\varphi)(\varphi-2a)+a.$$

На основаніи неравенства (15) и 4-го условія леммы получаемъ

$$a^2+b^2<a.$$

И такъ какъ, на основаніи (11), $a \leqq \varphi < 1$, то

$$a^2+b^2<1,$$

что противорѣчитъ предположенію.

Такимъ же образомъ докажемъ, что неравенство

$$C \leqq \psi - c$$

невозможно, и потому

$$b<\varkappa \quad \text{и} \quad -d<\varkappa.$$

§ 26.

Предположимъ, что t' и t'' какія нибудь цѣлыя раціональныя числа не равныя нулю одновременно. Опредѣлимъ числа t и t_1 изъ неравенствъ

$$0<t+t'\varphi+t''\psi<1 \quad \text{и} \quad 0<t_1-t'\varphi-t''\psi<1.$$

Изъ двухъ чиселъ

$$t+t'(a+bi)+t''(c+di) \quad \text{и} \quad t_1-t'(a+bi)-t''(c+di)$$

выберемъ то число, модуль котораго наименьшій.

Замѣтимъ, что модули этихъ чиселъ не могутъ быть равны вслѣдствіе условій § 16.

Обозначимъ выбранное нами число черезъ ω', а соотвѣтствующее значеніе формы $X+X'\varphi+X''\psi$ черезъ ω. Для краткости мы будемъ говорить, что комбинаціи (t', t'') значеній перемѣнныхъ X' и X'' соотвѣтствуетъ система (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (1). Комбинаціи (t', t'') и $(-t', -t'')$ не считаемъ различными.

Пусть ω'' комплексное число сопряженное съ ω'. Обозначимъ

$$\Omega = \omega'\omega'';$$

слѣдовательно

$$|\omega'| = |\omega''| = \sqrt{\Omega}.$$

Въ дальнѣйшемъ весьма важное значеніе имѣетъ тождество

$$\Omega = At'^2 + 2Bt't'' + Ct''^2 + \omega(\omega' + \omega'') - \omega^2, \tag{16}$$

которое не трудно провѣрить, если обозначить

$$\omega = t + t'\varphi + t''\psi,\ \omega' = t + t'(a+bi) + t''(c+di),\ \omega'' = t + t'(a-bi) + t''(c-di)$$

и

$$\Omega = (t + t'a + t''c)^2 + (t'b + t''d)^2.$$

На основаніи тождества (16) находимъ замѣчательное неравенство

$$\Omega < At'^2 + 2Bt't'' + Ct''^2 + \tfrac{1}{4}. \tag{17}$$

Неравенство (17) дѣлается очевиднымъ на основаніи тождества (16), если замѣтимъ, что по условію

$$|1 - \omega'| > |\omega'|,$$

и слѣдовательно

$$(1 - \omega')(1 - \omega'') > \omega'\omega'',$$

т. е.

$$\omega' + \omega'' < 1. \tag{18}$$

Такъ какъ мы предполагаемъ, что

$$0 < \omega < 1,$$

то

$$\omega(\omega' + \omega'') - \omega^2 < \omega - \omega^2 < \tfrac{1}{4}.$$

Алгориѳмъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ приведенную систему І-го рода въ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно.

§ 27.

Теорема. *Если система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{1}$$

удовлетворяетъ условіямъ леммы § 25 *и комбинаціямъ*

$$(1, 0),\quad (0, 1),\quad (1, -1) \quad и \quad (1, 1)$$

значеній перемѣнныхъ X' *и* X'' *соотвѣтствуютъ системы*

$$(\omega_0, \omega_0'),\quad (\omega_1, \omega_1'),\quad (\omega_2, \omega_2') \quad и \quad (\omega_3, \omega_3') \tag{2}$$

значеній формъ (1), *удовлетворяющія неравенствамъ*

$$|\omega_0'| > 1,\quad |\omega_1'| > 1,\quad |\omega_2'| > 1 \quad и \quad |\omega_3'| > 1, \tag{3}$$

то система (1, 1) *значеній коваріантныхъ формъ* (1) *представляетъ относительные тіпіта этихъ формъ, и одна изъ системъ* (2) *есть первая система смежная съ системой* (1, 1).

Предположимъ, что среди системъ (2) значеній коваріантныхъ формъ (1) мы нашли систему (ω_k, ω_k'), удовлетворяющую условію

$$|\omega_k'| < 1.$$

Такъ какъ кромѣ того по условію (§ 26)

$$0 < \omega_k < 1,$$

то система (1, 1), на основаніи § 17, не представляетъ относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (1), и потому эта система формъ не можетъ быть сдѣлана приведенной (§ 24) подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Предположимъ, что существуютъ неравенства (3). Мы докажемъ, что въ этомъ случаѣ не только нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t, t' и t'', удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < 1 \quad и \quad |t+t'(a+bi)+t''(c+di)| < 1,$$

но и неравенства

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < 1 \quad и \quad |t+t'(a+bi)+t''(c+di)| < |\omega_k'| \tag{4}$$

не могутъ имѣть мѣста, если $|\omega_k'|$ наименьшее изъ чиселъ

$$|\omega_0'|,\quad |\omega_1'|,\quad |\omega_2'| \quad и \quad |\omega_3'|.$$

На основаніи § 19 и условій (3) убѣждаемся въ томъ, что предложенная теорема будетъ доказана, если только мы докажемъ, что неравенства (4) не могутъ существовать одновременно ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ t, t' и t''.

Предположимъ, что можно найти цѣлыя раціональныя числа t, t' и t'', удовлетворяющія одновременно неравенствамъ (4). Обозначимъ

$$\left.\begin{array}{l}\omega = t+t'\varphi+t''\psi, \quad \omega' = t+t'(a+bi)+t''(c+di) \\ \Omega = (t+t'a+t''c)^2+(t'b+t''d)^2\end{array}\right\}. \tag{5}$$

Обозначимъ кромѣ того квадратъ модуля числа ω'_h черезъ Ω_h.
По условію существуютъ неравенства (4), т. е.

$$|\omega| < 1 \quad \text{и} \quad \Omega < \Omega_k.$$

Мы можемъ предполагать, что ω число положительное, и потому

$$0 < \omega < 1. \tag{6}$$

Такъ какъ по условію

$$0 < \omega_h < 1 \quad \text{и} \quad |\omega'_k| \leqq |\omega'_h|, \quad (h = 0, 1, 2, 3),$$

то слѣдовательно

$$\Omega < \Omega_0, \quad \Omega < \Omega_1, \quad \Omega < \Omega_2 \quad \text{и} \quad \Omega < \Omega_3. \tag{7}$$

Система коваріантныхъ формъ (1) удовлетворяетъ условіямъ леммы § 25, и потому квадратичная форма (A, B, C) приведенная, т. е.

$$A-B \geqq 0, \quad B \geqq 0 \quad \text{и} \quad C-B \geqq 0. \tag{8}$$

Здѣсь, на основаніи § 25,

$$A = (a-\varphi)^2+b^2, \quad B = (a-\varphi)(c-\psi)+bd \quad \text{и} \quad C = (c-\psi)^2+d^2. \tag{9}$$

Одно изъ чиселъ A, C и $A-2B+C$ есть minimum формы (A, B, C).

Обозначимъ этотъ minimum черезъ M. Minimum формы (A, B, C) получается при значеніяхъ перемѣнныхъ X' и X'', которымъ соотвѣтствуетъ одна изъ системъ (3): (ω_0, ω'_0), (ω_1, ω'_1) и (ω_2, ω'_2). Пусть эта система (ω_h, ω'_h).

На основаніи § 26 получаемъ весьма важное для дальнѣйшаго неравенство

$$\Omega_h < M+\frac{1}{4}. \tag{10}$$

На основаніи условій (3) находимъ $\Omega_h > 1$, и потому

$$M > \frac{3}{4}. \tag{11}$$

Слѣдовательно, на основаніи (10),

$$\Omega_h < \frac{4}{3} M.$$

На основаніи неравенствъ (7) получаемъ

$$\Omega < M+\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \Omega < \frac{4}{3} M. \tag{12}$$

Число Ω, опредѣляемое равенствами (5), представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Omega = [\omega + t'(a-\varphi) + t''(c-\psi)]^2 + [t'b + t''d]^2. \qquad (13)$$

Мы обозначаемъ черезъ $\varkappa$ опредѣлитель

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = (a-\varphi)d-(c-\psi)b. \qquad (14)$$

На основанiи этого равенства очевидно

$$\omega = (a-\varphi)\frac{d\omega}{\varkappa} - (c-\psi)\frac{b\omega}{\varkappa},$$

и потому на основанiи равенства (13) найдемъ

$$\Omega = \left[\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)(a-\varphi)+\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)(c-\psi)\right]^2+\left[\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)b+\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)d\right]^2.$$

На основанiи равенствъ (9) получимъ

$$\Omega = A\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)^2 + 2B\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)+C\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)^2. \qquad (15)$$

Умножая обѣ части этого неравенства сначала на C затѣмъ на A, извѣстнымъ способомъ получимъ неравенства

$$(AC-B^2)\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)^2 \leqq \Omega C \quad \text{и} \quad (AC-B^2)\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)^2 \leqq \Omega A.$$

На основанiи неравенствъ (12) будемъ имѣть

$$(AC-B^2)\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)^2 < \frac{4}{3}MC \quad \text{и} \quad (AC-B^2)\left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)^2 < \frac{4}{3}MA. \qquad (16)$$

Не трудно убѣдиться въ справедливости слѣдующаго предложенiя.

Если (A, B, C) *приведенная положительная квадратичная форма, т. е.*

$$A-B \geqq 0, \quad B \geqq 0 \quad \text{и} \quad C-B \geqq 0$$

и M *есть minimum формы, то существуютъ неравенства*

$$MA \leqq 2(AC-B^2) \quad \text{и} \quad MC \leqq 2(AC-B^2).$$

На основанiи этихъ неравенствъ и неравенствъ (16) находимъ

$$\left(t'+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)^2 < \frac{8}{3} \quad \text{и} \quad \left(t''-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)^2 < \frac{8}{3}.$$

Слѣдовательно

$$-\sqrt{\frac{8}{3}} < t' + \frac{d\omega}{\varkappa} < \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{и} \quad -\sqrt{\frac{8}{3}} < t'' - \frac{b\omega}{\varkappa} < \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

На основанiи замѣчанiя къ леммѣ § 25 и условiй (3) имѣемъ неравенства

$$0 \leqq \frac{b}{\varkappa} < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqq -\frac{d}{\varkappa} < 1. \qquad (17)$$

На основанiи этихъ неравенствъ и неравенствъ (6) получаемъ

$$-\sqrt{\frac{8}{3}} < t' < 1 + \sqrt{\frac{8}{3}} \quad \text{и} \quad -\sqrt{\frac{8}{3}} < t'' < 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$$

или

$$-1{,}6 < t' < 2{,}7 \quad \text{и} \quad -1{,}6 < t'' < 2{,}7.$$

Слѣдовательно цѣлыя рацiональныя числа t' и t'' могутъ имѣть только значенiя:

$$-1,\ 0,\ 1 \text{ и } 2.$$

Каждой комбинацiи значенiй t' и t'' соотвѣтствуетъ вполнѣ опредѣленное значенiе t, опредѣляемое условiями

$$0 < t + t'\varphi + t''\psi < 1.$$

Мы доказали, что возможны только 15 комбинацiй значенiй t' и t'':

$$(1, 0),\ (-1, 0),\ (0, 1),\ (0, -1),\ (1, -1),\ (-1, 1),\ (1, 1),\ (-1, -1)$$

и

$$(2, 0),\ (0, 2),\ (2, 2),\ (2, 1),\ (1, 2),\ (2, -1),\ (-1, 2).$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что предположенiя:

$$t' = 2 \text{ и } t'' = 0; \quad t' = 0 \text{ и } t'' = 2; \quad t' = 2 \text{ и } t'' = 2$$

невозможны.

Для того, чтобы доказать предложенную теорему, остается только показать, что предположенiя:

$$t' = 2 \text{ и } t'' = 1; \quad t' = 1 \text{ и } t'' = 2; \quad t' = 2 \text{ и } t'' = -1; \quad t' = -1 \text{ и } t'' = 2$$

также невозможны.

Предположимъ, что

$$t' = 2 \quad \text{и} \quad t'' = 1.$$

Равенство (15) при $t'=2$ и $t''=1$ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Omega = A + 2A\left(1+\frac{d\omega}{\varkappa}\right) + 2B\left(1-\frac{b\omega}{\varkappa}\right) + A\left(1+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)^2 + 2B\left(1+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)\left(1-\frac{b\omega}{\varkappa}\right) + C\left(1-\frac{b\omega}{\varkappa}\right)^2. \quad (18$$

Такъ какъ $B \geqq 0$ и на основанiи неравенствъ (6) и (17)

$$0 < 1 + \frac{d\omega}{\varkappa} \leqq 1 \quad \text{и} \quad 0 < 1 - \frac{b\omega}{\varkappa} \leqq 1,$$

то на основаніи равенства (18) получимъ

$$\Omega > A \quad \text{и} \quad \Omega > A + 2A\left(1 + \frac{d\omega}{\varkappa}\right) + 2B\left(1 - \frac{b\,\omega}{\varkappa}\right). \tag{19}$$

Слѣдовательно на основаніи (9)

$$\Omega > (a-\varphi)^2 + b^2,$$

или

$$\Omega > a^2 + b^2 - \varphi(2a - \varphi). \tag{20}$$

На основаніи 4-го условія леммы § 25, $0 < \varphi < 1$, и потому на основаніи (7)

$$\Omega < a^2 + b^2.$$

Изъ неравенства (20) слѣдуетъ

$$2a - \varphi > 0,$$

или

$$\varphi - a < \frac{1}{2}\varphi < \frac{1}{2}.$$

Изъ тождества

$$-A\frac{d}{\varkappa} + B\frac{b}{\varkappa} = \varphi - a \tag{21}$$

получаемъ

$$\varphi - a \geqq 0,$$

и потому

$$0 \leqq \varphi - a < \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Второе неравенство (19) на основаніи тождества (21) представляемъ въ видѣ

$$\Omega > A + 2(A+B) + 2(a-\varphi)\omega.$$

Раньше мы нашли (11), что $M > \frac{3}{4}$, и потому на основаніи неравенствъ (22)

$$\Omega > M + \frac{1}{2},$$

что противорѣчитъ неравенствамъ (12).

Такимъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что предположеніе: $t'=1$ и $t''=2$ невозможно.

Предположимъ, что

$$t' = 2 \quad \text{и} \quad t'' = -1.$$

Число Ω, опредѣляемое равенствомъ (15), представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\Omega = A-2B+C+(\omega+a-\varphi)^2+b^2+2(A-B)\left(1+\frac{d\omega}{\varkappa}\right)+2(C-B)\frac{b\omega}{\varkappa}.$$

Изъ этого равенства на основаніи условій (8) получаемъ

$$\Omega \geqq A-2B+C \quad \text{и} \quad \Omega \geqq A-2B+C+(\omega+a-\varphi)^2+b^2. \tag{23}$$

Раньше мы нашли (12), что $\Omega < M+\frac{1}{4}$, и потому необходимо

$$(\omega+a-\varphi)^2+b^2 < \frac{1}{4}. \tag{24}$$

Слѣдовательно

$$|\omega+a-\varphi| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad b < \frac{1}{2}. \tag{25}$$

По условію $0 < \varphi < 1$, и потому на основаніи (3)

$$a^2+b^2 > 1 \quad \text{и} \quad (1-a)^2+b^2 > 1. \tag{26}$$

Такъ какъ на основаніи (21) $a \leqq \varphi$, то изъ неравенствъ (26) на основаніи (25) получаемъ

$$a < -\sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad \omega-\varphi > 0. \tag{27}$$

Изъ тождества

$$a^2+b^2 = (\omega-\varphi)^2+(\omega+a-\varphi)^2+b^2-2(\omega-\varphi)(\omega+a-\varphi)$$

на основаніи (24) и (27) находимъ

$$a^2+b^2 < (\omega-\varphi)^2+\omega-\varphi+\frac{1}{4}.$$

Слѣдовательно

$$\omega-\varphi > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \varphi < \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Мы предполагаемъ, что

$$\omega = t+2\varphi-\psi \quad \text{и} \quad \Omega = (t+2a-c)^2+(2b-d)^2. \tag{29}$$

На основаніи неравенствъ (6) и (28) находимъ

$$\varphi+\frac{1}{2} < t+2\varphi-\psi < 1, \tag{30}$$

и потому

$$t < 1+\psi-2\varphi \quad \text{и} \quad t > \psi-\varphi+\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ, на основаніи 4-го условія леммы § 25, $0 < \psi < 1$, то изъ предыдущихъ неравенствъ слѣдуетъ: $t = 1$. Такимъ образомъ на основаніи (29) имѣемъ

$$\omega = 1 + 2\varphi - \psi \quad \text{и} \quad \Omega = (1 + 2a - c)^2 + (2b - d)^2. \tag{31}$$

Для дальнѣйшаго важно убѣдиться въ существованіи неравенства

$$1 + a > 0.$$

Обозначимъ

$$\psi - \varphi = \xi, \quad c - a = \alpha \quad \text{и} \quad d - b = \beta. \tag{32}$$

На основаніи (30) и (31)

$$\varphi + \frac{1}{2} < 1 + 2\varphi - \psi < 1,$$

и потому, на основаніи (32), $0 < \xi < 1$. Слѣдовательно

$$\Omega < \alpha^2 + \beta^2. \tag{33}$$

И такъ какъ (§ 26, тождество 16)

$$\alpha^2 + \beta^2 = A - 2B + C + 2\alpha\xi - \xi^2,$$

то на основаніи перваго неравенства (23) находимъ $\alpha > 0$, т. е.

$$c - a > 0.$$

Неравенство (33) равносильно слѣдующему:

$$(1 + 2a - c)^2 + (2b - d)^2 < (c - a)^2 + (d - b)^2. \tag{34}$$

По условію $b \geqq 0$ и $d \leqq 0$; слѣдовательно $2b - d \geqq b - d > 0$, и потому на основаніи неравенства (34) получимъ

$$|1 + 2a - c| < |c - a|. \tag{35}$$

Такъ какъ, на основаніи предыдущаго, $c - a > 0$, то изъ неравенства (35) слѣдуетъ

$$-1 - 2a + c < c - a,$$

и очевидно

$$1 + a > 0. \tag{36}$$

Неравенство (34) представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$3b^2 - 2bd < -(1+a)(1+3a-2c).$$

И такъ какъ

$$3b^2 > 3 - 3a^2,$$

то изъ предыдущаго неравенства найдемъ

$$3 - 3a^2 < -(1+a)(1+3a-2c)$$

или

$$(1+a)(4-2c) < 0.$$

На основаніи неравенства (36) находимъ $4-2c<0$, и потому

$$c>2. \tag{37}$$

На основаніи тождества

$$-B\frac{d}{\varkappa}+C\frac{b}{\varkappa}=\psi-c$$

находимъ $\psi-c\geq 0$, и потому $c<1$. Это неравенство противорѣчитъ (37). Такимъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что предположеніе: $t'=1$ и $t''=-2$ невозможно.

Замѣчаніе I. *Если комбинаціямъ* $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$ *соотвѣтствуютъ системы* (ω_0, ω_0'), (ω_1, ω_1'), (ω_2, ω_2') *и существуютъ неравенства*

$$|\omega_0'|>1 \quad \text{и} \quad |\omega_1'|>1, \tag{38}$$

то система (ω_3, ω_3'), *соотвѣтствующая комбинаціи* $(1, 1)$, *не можетъ удовлетворять условіямъ*

$$|\omega_3'|<|\omega_0'| \quad \text{и} \quad |\omega_3'|<|\omega_1'|, \tag{39}$$

если только не выполнены условія:

$$1)\ \varphi+\psi<1 \ \text{ и } \ a+c<\frac{1}{2}; \qquad 2)\ |\omega_2'|>|\omega_0'| \ \text{ и } \ |\omega_2'|>|\omega_1'|. \tag{40}$$

Нельзя предполагать, что

$$\omega_3=t-\varphi-\psi \quad \text{и} \quad \Omega_3=(t-a-c)^2+(-b-d)^2,$$

такъ какъ, на основаніи (15), изъ этихъ равенствъ слѣдовало бы

$$\Omega>A+2B+C.$$

На основаніи неравенства (17) § 26 убѣждаемся, что это неравенство невозможно при существованіи условій (38) и (39), и потому необходимо

$$\omega_3=t+\varphi+\psi \quad \text{и} \quad \Omega_3=(t+a+c)^2+(b+d)^2.$$

Предположимъ сначала, что $\varphi+\psi>1$. Въ этомъ случаѣ $t=-1$, и на основаніи условій (39) существовало бы, напримѣръ, неравенство

$$(-1+a+c)^2+(b+d)^2<a^2+b^2,$$

или

$$c^2+d^2+1+2(ac+bd-a-c)<0. \tag{41}$$

На основаніи неравенствъ

$$B=(a-\varphi)(c-\psi)+bd\geq 0, \quad \varphi-a\geq 0, \quad \psi-c\geq 0, \quad 0<\varphi<1, \quad 0<\psi<1$$

находимъ

$$(a-1)(c-1)+bd > 0,$$

или

$$ac+bd-a-c > -1,$$

и потому, на основаніи (41), $c^2+d^2 < 1$, что противорѣчитъ условіямъ (38). Итакъ

$$\omega_3 = \varphi+\psi \quad \text{и} \quad \Omega_3 = (a+c)^2+(b+d)^2.$$

Слѣдовательно $\varphi+\psi < 1$ и, на основаніи § 26, $a+c < \frac{1}{2}$.

На основаніи условій (39) находимъ

$$\Omega_3 < a^2+b^2 \quad \text{и} \quad \Omega_3 < c^2+d^2,$$

и потому

$$2(ac+bd) < -a^2-b^2 \quad \text{и} \quad 2(ac+bd) < -c^2-d^2. \tag{42}$$

Предположимъ, что 2-е изъ условій (40) не выполнено, т. е.

$$\text{или } \Omega_2 < \Omega_0, \quad \text{или } \Omega_2 < \Omega_1.$$

Слѣдовательно существуетъ по крайней мѣрѣ одно изъ неравенствъ

$$\text{или } \Omega_2 < a^2+b^2, \quad \text{или } \Omega_2 < c^2+d^2. \tag{43}$$

Система (ω_2, ω_2') соотвѣтствуетъ комбинаціи $(1, -1)$ и потому мы можемъ обозначить

$$\omega_2 = p \pm (\varphi-\psi) \quad \text{и} \quad \Omega_2 = [p \pm (a-c)]^2+[b-d]^2.$$

Здѣсь p равно одному изъ чиселъ: 0, -1 и 1. На основаніи неравенствъ (42) и (43) находимъ

$$p^2 \pm 2p(a-c)+a^2+b^2+c^2+d^2 < 0.$$

Число p очевидно не можетъ быть равно нулю, и потому $p = \pm 1$. Слѣдовательно

$$1 \pm 2(a-c)+a^2+b^2+c^2+d^2 < 0,$$

или

$$(1 \pm a)^2+b^2+(1 \mp c)^2+d^2 < 1. \tag{44}$$

Одно изъ чиселъ $(1 \pm a)^2+b^2$ и $(1 \mp c)^2+d^2$ больше единицы, такъ какъ по условію

$$(1-a)^2+b^2 > 1 \quad \text{и} \quad (1-c)^2+d^2 > 1;$$

слѣдовательно неравенство (44) невозможно.

Замѣчаніе II. *Предположимъ, что изъ чиселъ* Ω_0, Ω_1, Ω_2 и Ω_3 *выбраны два наименьшихъ числа* Ω_k *и* Ω_h, *причемъ* $\Omega_k > 1$ и $\Omega_h > 1$. *Если комбинаціямъ* (p', p'') *и* (q', q'') *значеній перемѣнныхъ* X' и X'' *соотвѣтствуютъ системы* (ω_k, ω_k') *и* (ω_h, ω_h'), *то опредѣлитель*

$$\begin{vmatrix} p' & q' \\ p'' & q'' \end{vmatrix}$$

по численной величинѣ равенъ единицѣ.

Такъ какъ комбинаціи (p', p'') и (q', q'') находятся между комбинаціями

$$(\pm 1, 0),\ (0, \pm 1),\ (\pm 1, \mp 1) \text{ и } (1, 1),$$

то равенство

$$\begin{vmatrix} p' & q' \\ p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

не будетъ существовать только при условіи, что

$$\Omega_k < \Omega_0,\ \Omega_k < \Omega_1 \quad \text{и} \quad \Omega_h < \Omega_0,\ \Omega_h < \Omega_1.$$

При доказательствѣ замѣчанія I мы убѣдились, что эти неравенства не могутъ существовать одновременно, если только

$$\Omega_k > 1 \quad \text{и} \quad \Omega_h > 1.$$

§ 28.

Если система коваріантныхъ формъ (1) удовлетворяетъ условіямъ леммы § 25, то на основаніи теоремы, доказанной въ предыдущемъ параграфѣ, легко узнать, представляетъ ли система (1, 1) относительные minima этихъ формъ или нѣтъ. Для этого нужно только найти Ω_0, Ω_1, Ω_2 и Ω_3, квадраты модулей чиселъ ω_0', ω_1', ω_2' и ω_3'. Если между этими числами, напримѣръ, число Ω_k меньше единицы, то система (1, 1) не представляетъ относительныхъ minima. Въ этомъ случаѣ систему коваріантныхъ формъ (1) подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{45}$$

преобразуемъ въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \omega_k, & \omega_h \\ 1, & \omega_k', & \omega_h' \end{bmatrix}, \tag{46}$$

которая не будетъ приведенной, такъ какъ существуютъ неравенства

$$0 < \omega_k < 1 \quad \text{и} \quad |\omega_k'| < 1.$$

Если существуютъ неравенства

$$\Omega_0 > 1,\ \Omega_1 > 1,\ \Omega_2 > 1 \text{ и } \Omega_3 > 1,$$

то въ этомъ случаѣ система (1, 1) представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ (1).

Изъ чиселъ Ω_0, Ω_1, Ω_2 и Ω_3 выбираемъ два наименьшихъ числа Ω_k и Ω_h, при чемъ предполагаемъ, что $\Omega_k < \Omega_h$. Система коваріантныхъ формъ (1) подстановкой вида (45) преобразуется въ приведенную систему 1-го рода (46).

Алгориѳмъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована подстановкой вида (45) въ приведенную систему 1-го рода въ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно, заключается въ слѣдующемъ.

Алгориѳмъ.

Данную систему коваріантныхъ формъ нужно преобразовать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\;, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}, \tag{1}$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ условіямъ леммы § 25.

Затѣмъ должны быть найдены системы (ω_0, ω_0'), (ω_1, ω_1') и (ω_2, ω_2'), *соотвѣтствующія комбинаціямъ* (1, 0), (0, 1) и (1, —1) *перемѣнныхъ* X' *и* X''.

Если окажется, что одно изъ чиселъ Ω_0, Ω_1 *и* Ω_2 *меньше единицы или же* Ω_2 меньше Ω_0 *или* Ω_1, *то вычисленія кончены. Если же:* $\Omega_2 > \Omega_0 > 1$ *и* $\Omega_2 > \Omega_1 > 1$ *и при томъ* $\varphi + \psi < 1$ *и* $a + c < \frac{1}{2}$, *то нужно найти еще число*

$$\Omega_3 = (a+c)^2 + (b+d)^2.$$

Въ первомъ случаѣ изъ трехъ чиселъ Ω_0, Ω_1 *и* Ω_2 *нужно выбрать два наименьшихъ. Во 2-мъ случаѣ два наименьшихъ числа выбираются между числами* Ω_0, Ω_1 *и* Ω_3.

Предполагая, что Ω_k *и* Ω_h *два такихъ числа, при чемъ* $\Omega_k < \Omega_h$, *получимъ систему коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \omega_k, & \omega_h \\ 1, & \omega_k', & \omega_h' \end{bmatrix},$$

которая будетъ приведенной системой 1-го рода, если $\Omega_k = |\omega_k'|^2 > 1$. *Эта система получается изъ системы* (1) *подстановкой вида*

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

О системахъ коваріантныхъ формъ, зависящихъ отъ корней уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ.

§ 29.

Предположимъ, что неприводимое уравненіе

$$\rho^3 = r\rho + s \tag{1}$$

съ цѣлыми раціональными коэффиціентами r и s имѣетъ одинъ дѣйствительный корень ρ и два комплексныхъ сопряженныхъ корня ρ' и ρ''.

Извѣстно, что

$$\rho' = -\frac{\rho}{2} + i\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2} \quad \text{и} \quad \rho'' = -\frac{\rho}{2} - i\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2}. \tag{2}$$

Число $\sqrt{3\rho^2-4r}$ положительное. На основаніи равенствъ (2) получаемъ

$$\rho'^2 = \frac{-\rho^2+2r}{2} - i\frac{\rho\sqrt{3\rho^2-4r}}{2} \quad \text{и} \quad \rho''^2 = \frac{-\rho^2+2r}{2} + i\frac{\rho\sqrt{3\rho^2-4r}}{2}. \tag{3}$$

Условимся называть системами, зависящими отъ корней уравненія (1), системы коваріантныхъ формъ вида

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix},$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}, & \psi &= \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma} \\ a+bi &= \frac{m+m'\rho'+m''\rho'^2}{\sigma}, & c+di &= \frac{n+n'\rho'+n''\rho'^2}{\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и m, m', m'', n, n', n'', σ цѣлыя раціональныя числа.

Такія системы коваріантныхъ формъ мы будемъ обозначать символомъ

$$\left[1, \ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}, \ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\right]. \tag{5}$$

На основаніи равенствъ (2), (3) и (4) находимъ

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{2(m+m''r)-m'\rho-m''\rho^2}{2\sigma}, & c &= \frac{2(n+n''r)-n'\rho-n''\rho^2}{2\sigma} \\ b &= \frac{m'-m''\rho}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2}, & d &= \frac{n'-n''\rho}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Поэтому на основаніи равенства

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = (a-\varphi)d-(c-\psi)b$$

получимъ

$$\varkappa = \frac{m'n''-m''n'}{\sigma^2}\cdot\frac{(3\rho^2-r)\sqrt{3\rho^2-4r}}{2}. \tag{7}$$

Обозначимъ черезъ D дискриминантъ уравненія (1), а черезъ Δ его численное значеніе. Такъ какъ

$$(3\rho^2-r)^2(3\rho^2-4r) = 27s^2-4r^3 = \Delta,$$

то на основаніи равенства (7) находимъ

$$\varkappa = \frac{m'n''-m''n'}{\sigma^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2}. \tag{8}$$

Квадратичную форму

$$\Phi = AX'^2+2BX'X''+CX''^2 = [(a-\varphi)X'+(c-\psi)X'']^2+[bX'+dX'']^2$$

мы замѣняемъ формой

$$F = \frac{\sigma^2}{3\rho^2-r}\Phi.$$

Если форма Φ приведенная, то будетъ приведенной и форма F; наоборотъ, если форма F приведенная, то Φ также приведенная форма.

На основаніи равенствъ (4) находимъ форму F:

$$[m'^2+m'm''\rho+m''^2(\rho^2-r)]X'^2+[2m'n'+(m'n''+m''n')\rho+2m''n''(\rho^2-r)]X'X''+$$
$$+[n'^2+n'n''\rho+n''^2(\rho^2-r)]X''^2.$$

Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ (5) удовлетворяетъ условіямъ леммы § 25. Эти условія можно замѣнить слѣдующими: 1-е условіе: $\varkappa>0$. На основаніи равенства (8) находимъ

$$m'n''-m''n'>0.$$

2-е условіе: $A-B\geqq 0$, $B\geqq 0$ и $C-B\geqq 0$. Мы можемъ предполагать, что

$$A = m'^2+m'm''\rho+m''^2(\rho^2-r),\quad B = m'n'+(m'n''+m''n')\frac{\rho}{2}+m''n''(\rho^2-r),$$
$$C = n'^2+n'n''\rho+n''^2(\rho^2-r).$$

3-е условіе: $b\geqq 0$ и $d\leqq 0$. На основаніи равенствъ (6) получаемъ

$$m'-m''\rho>0 \quad\text{и}\quad n'-n''\rho<0.$$

4-е условіе: $0 < \varphi < 1$ и $0 < \psi < 1$. На основаніи (4)

$$0 < \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma} < 1.$$

Замѣтимъ, что если (ω, ω') система значеній коваріантныхъ формъ (5), при чемъ $\omega = t + t'\rho + t''\rho^2$, то число Ω, равное квадрату модуля числа ω', есть число союзное съ ω и опредѣляется формулой

$$\Omega = [(t + t''r)^2 - t'(t'r + t''s)] + [t''^2 s - tt']\rho + [t'^2 - t''(t + t''r)]\rho^2. \qquad (9)$$

Въ примѣненіи къ системамъ, зависящимъ отъ корней уравненія (1), алгориѳмъ, предложенный въ § 28, измѣняется слѣдующимъ образомъ.

Данную систему коваріантныхъ формъ нужно преобразовать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему

$$\left[1, \quad \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}, \quad \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma}\right],$$

удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ:

1) $$m'n'' - m''n' > 0.$$

2) *Форма*

$$[m'^2 + m'm''\rho + m''^2(\rho^2 - r)]X'^2 + [2m'n' + (m'n'' + m''n')\frac{\rho}{2} + 2m''n''(\rho^2 - r)]X'X'' +$$
$$+ [n'^2 + n'n''\rho + n''^2(\rho^2 - r)]X''^2$$

приведенная.

3) *Первый коэффиціентъ линейной формы* $X'(m' - n''\rho) + X''(n' - n''\rho)$ *положительное число, а второй — отрицательное число.*

4) $$0 < \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma} < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma} < 1.$$

Затѣмъ должны быть найдены числа

$$a = \frac{2(m + m''r) - m'\rho - m''\rho^2}{2\sigma} \quad \text{и} \quad c = \frac{2(n + n''r) - n'\rho - n''\rho^2}{2\sigma}.$$

Если $a < \frac{1}{2}$, *то* $\omega_0 = \varphi = \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}$ *и* Ω_0, *число союзное съ* $\frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}$, *опредѣляется по формулѣ* (9). *Если* $a > \frac{1}{2}$, *то*

$\omega_0 = 1 - \varphi$. *Такимъ образомъ опредѣляются числа* ω_0, ω_1, ω_2 *и* Ω_0, Ω_1, Ω_2, *соотвѣтствующія комбинаціямъ* (1, 0), (0, 1) *и* (1, —1), *и т. д. во всемъ согласно съ алгориѳмомъ, изложеннымъ въ* § 28.

Примѣръ I.

Дано уравненіе

$$\rho^3 = 2\rho + 5. \qquad (10)$$

Дискриминантъ этого уравненія $D = -643$, и потому предложенное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень. Вычислемъ

$$\rho \neq 2{,}09 \quad \text{и} \quad \rho^2 \neq 4{,}39. \qquad (11)$$

Найдемъ подстановку, которая преобразуетъ систему коваріантныхъ формъ

$$[1,\ \rho,\ \rho^2] \qquad (12)$$

въ приведенную систему 1-го рода. Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$m = 0,\ m' = 1,\ m'' = 0,\ n = 0,\ n' = 0,\ n'' = 1 \ \text{и}\ \sigma = 1.$$

Слѣдовательно

$$m'n'' - m''n' = 1. \qquad (13)$$

На основаніи формулъ

$$A = m'^2 + m'm''\rho + m''^2(\rho^2 - r), \quad B = m'n' + (m'n'' + m''n')\frac{\rho}{2} + m''n''(\rho^2 - r),$$
$$C = n'^2 + n'n''\rho + n''^2(\rho^2 - r)$$

находимъ

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}\rho \quad \text{и} \quad C = -2 + \rho^2.$$

На основаніи равенствъ (11) квадратичную форму (A, B, C) замѣняемъ формой (1,00, 1,05, 2,39) или, умножая всѣ коэффиціенты на 100, формой (100, 105, 239). Форма эта неприведенная. Подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (14)$$

преобразуемъ ее въ приведенную форму (100, 5, 129).

Линейную форму

$$X'(m' - m''\rho) + X''(n' - n''\rho)$$

преобразуемъ подстановкой (14). Въ разсматриваемомъ случаѣ имѣемъ форму $X' - X''\rho$, и потому послѣ подстановки (14) получимъ форму $X' + X''(-1 - \rho)$, коэффиціенты которой удовлетворяютъ 3-му условію приведенія.

Систему формъ (12) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$0 < \beta + \rho < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \gamma - \rho + \rho^2 < 1.$$

На основаніи (11) находимъ $\beta = -2$ и $\gamma = -2$. Систему (12) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

приводимъ къ виду

$$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2]. \tag{15}$$

Эта система удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ леммы § 25. Вычисляемъ

$$\varphi = -2+\rho \neq 0{,}09, \quad \psi = -2-\rho+\rho^2 \neq 0{,}30$$

$$a = \frac{-4-\rho}{2} \neq -3{,}05, \quad c = \frac{\rho-\rho^2}{2} \neq -1{,}15.$$

Такъ какъ $\varphi < \psi$, то вычисляемъ $c - a \neq 1{,}90$.

Число a меньше $\frac{1}{2}$, и потому $\omega_0 = \varphi = -2+\rho$. Число Ω_0 союзное съ $-2+\rho$, на основаніи (9), равно $2+2\rho+\rho^2$. Такъ какъ $c < \frac{1}{2}$, то

$$\omega_1 = -2-\rho+\rho^2 \quad \text{и} \quad \Omega_1 = 3+3\rho+\rho^2.$$

Но $c - a > \frac{1}{2}$, и потому

$$\omega_2 = 1+\varphi-\psi = 1+2\rho-\rho^2, \quad \text{а} \quad \Omega_2 = 3+3\rho+3\rho^2.$$

Число Ω_2 больше Ω_0 и Ω_1; кромѣ того выполнены условія

$$\varphi+\psi < 1 \quad \text{и} \quad a+c < \frac{1}{2}.$$

Мы должны слѣдовательно найти еще число Ω_3 союзное съ

$$\varphi+\psi = -4+\rho^2.$$

Получаемъ

$$\Omega_3 = 4+5\rho+2\rho^2.$$

Изъ чиселъ

$$\Omega_0 = 2+2\rho+\rho^2, \quad \Omega_1 = 3+3\rho+\rho^2 \quad \text{и} \quad \Omega_3 = 4+5\rho+2\rho^2$$

выбираемъ два наименьшихъ. Очевидно, что $\Omega_0 < \Omega_1 < \Omega_3$, и такъ какъ $\Omega_0 > 1$, то система коваріантныхъ формъ (15) — приведенная система 1-го рода.

Составимъ теперь рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода, слѣдующихъ (§ 24) за системой (15). Эту систему преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Получимъ систему

$$[-2+\rho, \ -2-\rho+\rho^2, \ 1]$$

или въ нормальномъ видѣ

$$\left[1, \ \frac{-2-\rho+\rho^2}{-2+\rho}, \ \frac{1}{-2+\rho}\right]. \tag{16}$$

Число союзное съ $-2+\rho$ есть $2+2\rho+\rho^2$; кромѣ того

$$(-2+\rho)(2+2\rho+\rho^2)=1, \quad (-2-\rho+\rho^2)(2+2\rho+\rho^2)=1+\rho,$$

и потому система (16) можетъ быть представлена въ видѣ

$$[1, \ 1+\rho, \ 2+2\rho+\rho^2]. \tag{17}$$

Этой системѣ соотвѣтствуетъ квадратичная форма (A, B, C), гдѣ

$$A=1, \quad B=2+\frac{\rho}{2} \quad \text{и} \quad C=2+2\rho+\rho^2.$$

Получаемъ на этомъ основаніи форму (100, 305, 1057), которая подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{18}$$

преобразуется въ приведенную форму (100, 5, 127).

Линейная форма $X'+X''(2-\rho)$ подстановкой (18) преобразуется въ форму $X'+X''(-1-\rho)$, удовлетворяющую 3-му условію приведенія.

Въ системѣ (17) дѣлаемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$0<\beta+1+\rho<1 \quad \text{и} \quad 0<\gamma-1-\rho+\rho^2<1.$$

Находимъ $\beta=-3$ и $\gamma=-1$. Подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

приводитъ систему (17) къ виду

$$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2].$$

Эту приведенную систему 1-го рода мы нашли раньше (15).

Слѣдующій рядъ системъ формъ и подстановокъ будетъ повторяться періодически.

$$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2] \quad (I)$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$[1,\ 1+\rho,\ 2+2\rho+\rho^2]$$

$$[1,\ 1+\rho,\ 2+2\rho+\rho^2]$$
$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2] \quad (I)$$ и т. д.

Приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что въ разсматриваемомъ случаѣ рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода, представленныхъ въ нормальномъ видѣ, состоитъ изъ одной безчисленное множество разъ повторяющейся системы (I).

Примѣръ II.

Дано уравненіе

$$\rho^3 = 19. \tag{19}$$

Всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія (19), заключаются въ линейной формѣ *)

$$X + X'\rho + X''\,\frac{1+\rho+\rho^2}{3}.$$

Этой формѣ соотвѣтствуетъ система коваріантныхъ формъ

$$\left[1,\ \rho,\ \frac{1+\rho+\rho^2}{3}\right]. \tag{20}$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$m=0,\quad m'=3,\quad m''=0,\quad n=1,\quad n'=1,\quad n''=1 \quad \text{и} \quad \sigma=3.$$

---

*) См. А. А. Марковъ: „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique etc." (Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg, VII-e série, T. XXXVIII, № 9. p. 4). Также И. И. Ивановъ: „Цѣлыя комплексныя числа" (С.-Петербургъ, 1891 г., стр. 36) и Г. Вороной: „О цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени" (С.-Петербургъ, 1894 г., стр. 69).

Квадратичная форма (A, B, C) имѣетъ коэффиціенты

$$A = 9,\quad B = 3 + \frac{3}{2}\rho \quad \text{и} \quad C = 1 + \rho + \rho^2.$$

Вычисляемъ ρ и ρ^2:

$$\rho \neq 2{,}67 \quad \text{и} \quad \rho^2 \neq 7{,}12. \tag{21}$$

Форму (A, B, C) замѣняемъ формой (900, 702, 1079). Эта форма приведенная.

Коэффиціенты линейной формы $X'3 + X''(1-\rho)$ удовлетворяютъ 3-му условію приведенія, и потому систему (20) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Числа β и γ опредѣляются изъ неравенствъ

$$0 < \beta + \rho < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \gamma + \frac{1 + \rho + \rho^2}{3} < 1.$$

Находимъ $\beta = -2$ и $\gamma = -3$. Подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

приводитъ систему (20) къ виду

$$\left[1,\ -2 + \rho,\ \frac{-8 + \rho + \rho^2}{3}\right]. \tag{22}$$

Эта система удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ леммы § 25.

Вычисляемъ на основаніи (21)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= -2 + \rho \neq 0{,}67, & \psi &= \frac{-8 + \rho + \rho^2}{3} \neq 0{,}60 \\ a &= \frac{-4 - \rho}{2} \neq -3{,}34, & c &= \frac{-16 - \rho - \rho^2}{6} \neq -4{,}30 \end{aligned}\right\}.$$

Такъ какъ $\varphi > \psi$, то вычисляемъ $a - c \neq 0{,}96$. На основаніи неравенствъ

$$a < \frac{1}{2},\quad c < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad a - c > \frac{1}{2}$$

обозначаемъ

$$\omega_0 = -2 + \rho,\quad \omega_1 = \frac{-8 + \rho + \rho^2}{3} \quad \text{и} \quad \omega_2 = 1 - \varphi + \psi = \frac{1 - 2\rho + \rho^2}{3}.$$

Слѣдовательно

$$\Omega_0 = 4+2\rho+\rho^2, \quad \Omega_1 = 5+3\rho+\rho^2 \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \frac{13+7\rho+\rho^2}{3}.$$

Такъ какъ $\Omega_2 < \Omega_0 < \Omega_1$ и $\Omega_2 > 1$, то система

$$[1, \omega_2, \omega_0],$$

т. е.

$$\left[1, \ \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}, \ -2+\rho\right], \tag{23}$$

приведенная система 1-го рода. Она получается изъ системы (20) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Систему (23) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ. Найдемъ систему

$$\left[1, \ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}, \ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36}\right]. \tag{24}$$

Здѣсь

$$m = -7, \ m' = -1, \ m'' = 5, \ n = 13, \ n' = 7, \ n'' = 1 \ \text{и} \ \sigma = 36.$$

Такъ какъ $m'n''-m''n' = -36 < 0$, то систему (24) замѣняемъ системой

$$\left[1, \ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36}, \ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right]. \tag{25}$$

Этой системѣ соотвѣтствуетъ квадратичная форма (A, B, C), коэффиціенты которой

$$A = 49+7\rho+\rho^2, \quad B = -7+17\rho+5\rho^2 \quad \text{и} \quad C = 1-5\rho+25\rho^2.$$

Получаемъ форму (7481, 7399, 16565). Эта форма приведенная.

Коэффиціенты линейной формы $X'(7-\rho)+X''(-1-5\rho)$ удовлетворяютъ 3-му условію приведенія. Поэтому систему (25) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ условій

$$0<\beta+\frac{13+7\rho+\rho^2}{36}<1 \quad \text{и} \quad 0<\gamma+\frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}<1.$$

Находимъ $\beta=-1$ и $\gamma=0$. Получаемъ такимъ образомъ систему

$$\left[1,\ \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right]. \tag{26}$$

Вычисляемъ

$$\varphi \neq 0{,}08,\quad \psi \neq 0{,}72,\quad a \neq -1{,}00 \quad \text{и} \quad c \neq -0{,}65.$$

На этомъ основаніи находимъ

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}, & \omega_1 &= \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}, & \omega_2 &= \frac{4-2\rho+\rho^2}{9} \\ \Omega_0 &= \frac{11+5\rho+2\rho^2}{36}, & \Omega_1 &= \frac{4+13\rho+\rho^2}{36}, & \Omega_2 &= \frac{2+\rho}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Такъ какъ $\Omega_2>\Omega_0$, $\Omega_2>\Omega_1$ и выполнены условія

$$\varphi+\psi<1 \quad \text{и} \quad a+c<\frac{1}{2},$$

то вычисляемъ еще

$$\omega_3=\varphi+\psi=\frac{-5+\rho+\rho^2}{6} \quad \text{и} \quad \Omega_3=\frac{1+4\rho+\rho^2}{6}.$$

На основаніи неравенствъ $\Omega_0<\Omega_1<\Omega_3$ приходимъ къ заключенію, что система (26) приведенная система 1-го рода. Эту систему преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ

$$\left[1,\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3},\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3}\right].$$

Эта система подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ приведенную систему (23).

Слѣдующій рядъ системъ и подстановокъ будетъ повторяться періодически.

$$\left[1,\ \frac{1-2\rho+\rho^2}{3},\ -2+\rho\right] \quad (I)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36},\ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right] \quad (II)$$

$$\left[1,\ \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right] \quad (II)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3},\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{1-2\rho+\rho^2}{3},\ -2+\rho\right] \quad (I)$$ и т. д.

Низшій предѣлъ численнаго значенія опредѣлителя $\varkappa$, составленнаго изъ коэффиціентовъ приведенной системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}.$$

§ 30.

Теорема. Если система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1\ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix} \tag{1}$$

приведенная система 1-го или 2-го рода, то опредѣлитель

$$\varkappa_1 = \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 & d_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

по численной величинѣ больше $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Способомъ, изложеннымъ въ § 25, опредѣляемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая преобразуетъ систему (1) въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющую условіямъ леммы § 25.

Численное значеніе опредѣлителя (2) равно численному значенію опредѣлителя

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & a & c \\ 0 & b & d \end{vmatrix} = (a-\varphi)d-(c-\psi)b. \tag{4}$$

На основаніи 1-го условія леммы § 25

$$\varkappa > 0.$$

Допустимъ, что $\varkappa$ не больше $\sqrt{\frac{3}{4}}$, т. е.

$$\varkappa \leqq \sqrt{\frac{3}{4}}. \tag{5}$$

На основаніи замѣчанія къ леммѣ § 25 получаемъ неравенства

$$0 \leqq b < \varkappa \quad \text{и} \quad 0 \leqq -d < \varkappa, \tag{6}$$

такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$0 < \varphi < 1, \quad 0 < \psi < 1 \tag{7}$$

и потому

$$a^2+b^2 > 1, \quad (1-a)^2+b^2 > 1, \quad c^2+d^2 > 1, \quad (1-c)^2+d^2 > 1, \tag{8}$$

иначе система (1, 1) не представляла бы относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (1).

На основаніи неравенствъ (5) и (6) находимъ

$$0 \leqq b < \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad 0 \leqq -d < \sqrt{\frac{3}{4}} \tag{9}$$

и, на основаніи неравенствъ (8),

$$a < -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad c < -\frac{1}{2}, \tag{10}$$

такъ какъ изъ тождествъ

$$-A\frac{d}{\varkappa} + B\frac{b}{\varkappa} = \varphi - a \quad \text{и} \quad -B\frac{d}{\varkappa} + C\frac{b}{\varkappa} = \psi - c$$

слѣдуетъ

$$a \leqq \varphi < 1 \quad \text{и} \quad c \leqq \psi < 1.$$

Здѣсь A, B и C опредѣляются, какъ и въ § 25, равенствами

$$A = (a-\varphi)^2+b^2, \quad B = (a-\varphi)(c-\psi)+bd \quad \text{и} \quad C = (c-\psi)^2+d^2. \tag{11}$$

На основаніи равенства (4) и неравенствъ (7) и (9) находимъ

$$\varkappa > ad-cb > 0. \tag{12}$$

Вводимъ въ наши разсужденія квадратичную форму

$$(aX'+cX'')^2+(bX'+dX'')^2 = (a^2+b^2)X'^2+2(ac+bd)X'X''+(c^2+d^2)X''^2. \quad (13)$$

Опредѣлитель этой формы $-(ad-cb)^2$.
На основаніи (9) и (10) находимъ

$$ac+bd > -\frac{1}{2}.$$

Если бы оказалось, что $ac+bd \leqq 1\frac{1}{2}$, то minimum формы (13) былъ бы равенъ одному изъ чиселъ

$$a^2+b^2, \quad c^2+d^2 \quad \text{и} \quad (a-c)^2+(b-d)^2,$$

такъ какъ по условію эти числа больше единицы (иначе система (1) не была бы приведенной). Если этотъ minimum обозначимъ черезъ M_0, то, какъ извѣстно *),

$$M_0^2 \leqq \frac{4}{3}(ad-cb)^2.$$

На основаніи этого неравенства и условія $M_0 > 1$ найдемъ

$$ad-cb > \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

На основаніи неравенства (12) получимъ $\varkappa > \sqrt{\frac{3}{4}}$, что противорѣчитъ предположенію. Итакъ необходимо:

$$ac+bd > 1\tfrac{1}{2}. \quad (14)$$

По условію квадратичная форма (A, B, C) приведенная, т. е.

$$A-B \geqq 0, \quad B \geqq 0 \quad \text{и} \quad C-B \geqq 0. \quad (15)$$

На основаніи равенствъ (11) и неравенствъ (7) и (10) находимъ

$$B > ac+bd,$$

и потому на основаніи (14)

$$B > 1\tfrac{1}{2}.$$

На основаніи условій (15) получаемъ

$$A > 1\tfrac{1}{2} \quad \text{и} \quad C > 1\tfrac{1}{2}. \quad (16)$$

Minimum формы (A, B, C) равенъ одному изъ чиселъ

$$A, \quad C \quad \text{и} \quad A-2B+C.$$

---

*) См. Lējeune Dirichlet: „Zahlentheorie", § 65. S. 157 (Vierte Auflage).

Найдемъ между этими числами два наименьшихъ числа, которыя обозначимъ M и N. Эти числа, какъ извѣстно, удовлетворяютъ условію

$$MN \leqq \frac{4}{3}(AC-B^2).$$

И такъ какъ на основаніи равенствъ (11)

$$AC-B^2 = \varkappa^2,$$

то

$$MN \leqq \frac{4}{3}\varkappa^2.$$

Одно изъ чиселъ M и N находится между числами (16). Если предположимъ, что $M \leqq N$, то получимъ неравенство

$$\frac{3}{2}M < \frac{4}{3}\varkappa^2,$$

и на основаніи (5)

$$M < \frac{2}{3}. \tag{17}$$

На основаніи неравенствъ (16) убѣждаемся, что

$$M = A-2B+C.$$

Если обозначимъ (ω, ω') систему значеній коваріантныхъ формъ (3), соотвѣтствующую комбинаціи $(1, -1)$ значеній перемѣнныхъ X' и X'', то на основаніи § 26 получимъ неравенства

$$0 < \omega < 1 \quad \text{и} \quad \Omega < A-2B+C+\frac{1}{4},$$

гдѣ $\Omega = |\omega'|^2$. Слѣдовательно, на основаніи (17)

$$\Omega < \frac{2}{3}+\frac{1}{4} < 1.$$

Неравенства $0 < \omega < 1$ и $\Omega < 1$ не могутъ существовать одновременно, если только $(1, 1)$ есть система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (3).

Приходимъ такимъ образомъ къ противорѣчію, и потому необходимо

$$\varkappa > \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Замѣчаніе. *Существуетъ безчисленное множество приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ вида* (1), *у которыхъ численное значеніе опредѣлителя* $\varkappa$ *сколь угодно мало отличается отъ* $\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Напримѣръ, система коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}, \tag{18}$$

коэффиціенты которой

$$\varphi=\varepsilon,\quad \psi=\eta,\quad a=-\sqrt{\frac{3}{4}}-\varepsilon',\quad c=-\sqrt{\frac{3}{4}}-\eta',\quad b=\frac{1}{2}+\varepsilon'',\quad d=-\frac{1}{2}-\eta'',$$

можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

если только ε, ε', ε'', η, η' и η'' не равныя нулю положительныя числа.

Опредѣлитель $\varkappa$ системы (18) будетъ сколь угодно мало отличаться отъ $\sqrt{\frac{3}{4}}$, если ε, ε', ε'', η, η' и η'' достаточно малыя числа.

§ 31.

Мы нашли точный предѣлъ minimum'а значеній опредѣлителя $\varkappa$ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ вида (1).

Весьма интересно и важно было бы найти точный низшій предѣлъ maximum'а значеній опредѣлителя $\varkappa$ эквивалентныхъ системъ вида (1).

Соотвѣтствующій вопросъ для системъ коваріантныхъ формъ вида

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix}, \tag{19}$$

разсмотрѣнныхъ нами въ отдѣлѣ I, рѣшается на основаніи изслѣдованій А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева*).

Точный низшій предѣлъ maximum'а значеній опредѣлителя

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \varphi \\ 1 & \varphi' \end{vmatrix} = \varphi'-\varphi$$

эквивалентныхъ системъ вида (19) есть $\sqrt{5}$. Опредѣлитель системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1, & \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

---

*) Cм. A. Korkine et G. Zolotareff „Sur les formes quadratiques" (Mathematische Annalen, Bd. VI, p. 369).

по численной величинѣ равенъ $\sqrt{5}$, и это число есть maximum значеній опредѣлителя $\varkappa$ системъ вида (19) эквивалентныхъ системѣ (20).

Если исключить системы эквивалентныя системѣ (20), то точный низшій предѣлъ maximum'а значеній опредѣлителя $\varkappa$ для остальныхъ системъ есть $\sqrt{8}$.

На основаніи изслѣдованій А. А. Маркова*) можно такимъ образомъ получить безконечный рядъ чиселъ

$$\sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{\frac{221}{25}},\ \ldots$$

Всѣ числа этого ряда имѣютъ замѣчательную форму

$$\sqrt{9-\frac{4}{m^2}}\,.$$

Здѣсь m есть цѣлое число; напримѣръ, m равно: 1, 2, 5, 13, ...

Алгориѳмъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ приведенную систему 2-го рода въ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно.

§ 32.

Лемма. *Каждая система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{1}$$

можетъ быть преобразована подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ эквивалентную ей систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1\ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1i, & c_1+d_1i \end{bmatrix},$$

---

*) См. А. Марковъ: „О бинарныхъ квадратичныхъ формахъ положительнаго опредѣлителя". (С.-Петербургъ, 1880 г.).

удовлетворяющую слѣдующимъ 3-мъ условіямъ:

1) *Числа* $\varphi_1 - a_1$ *и* $\psi_1 - c_1$ *одного знака, при чемъ*

$$|\varphi_1 - a_1| > |\psi_1 - c_1|;$$

числа b_1 *и* d_1 *разныхъ знаковъ, если только* b_1 *не равно нулю, при чемъ*

$$\text{или} \quad |b_1| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad |d_1| > \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \text{или} \quad |b_1| < |d_1| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}},$$

но тогда $\psi_1 - c_1 = 0$.

2) $a_1^2 + b_1^2 < 1$ *и* $\varphi_1 > 0$, *при чемъ если* $(-1 + a_1)^2 + b_1^2 < 1$, *то*

$$|-1+\varphi_1| > \varphi_1.$$

3) $$-\frac{1}{2} < c_1 < \frac{1}{2}.$$

Изъ коэффиціентовъ системы коваріантныхъ формъ (1) составимъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \varphi - a, & \psi - c \\ b \ \ , & d \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Способомъ, изложеннымъ въ отдѣлѣ I (§§ 7 и 9), преобразуемъ систему формъ (2) подстановкой

$$\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{3}$$

въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}, \tag{4}$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:
числа λ и μ одного знака, при чемъ $|\lambda| > |\mu|$; числа λ' и μ' разныхъ знаковъ, при чемъ

$$\text{или} \quad |\lambda'| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad |\mu'| > \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad \text{или} \quad |\lambda'| < |\mu'| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}},$$

но тогда $\mu = 0$.

Когда коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ (2): $\varphi - a$ и $\psi - c$ образуютъ неприводимое основаніе, тогда можно преобразовать эти коваріантныя формы въ приведенную систему 1-го рода, удовлетворяющую условіямъ:

$$|\lambda'| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad |\mu'| > \sqrt{\frac{3}{4}}. \tag{5}$$

Когда коэффиціенты $\varphi - a$ и $\psi - c$ образуютъ приводимую систему, можетъ случиться, что нельзя найти подстановки, которая преобразовала бы систему (2) въ приведенную систему 1-го рода (4), удовлетворяющую условіямъ (5). Такой подстановки нельзя найти только въ томъ случаѣ, когда системѣ (2) эквивалентна система

$$\begin{bmatrix} \lambda_1, & \theta \\ \lambda_1', & \mu_1' \end{bmatrix}, \tag{6}$$

удовлетворяющая условіямъ: числа λ_1' и μ_1' разныхъ знаковъ, при чемъ

$$|\lambda_1'| < |\mu_1'| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}}\,. \tag{7}$$

Такихъ системъ въ отдѣлѣ I мы не разсматривали, но эти системы можно также назвать приведенными системами 1-го рода.

Предположимъ, что опредѣлены коэффиціенты подстановки (3), преобразующей систему (2) или въ систему (4), удовлетворяющую условіямъ (5), или въ систему (6), удовлетворяющую условіямъ (7).

Данную систему коваріантныхъ формъ (1) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Число β опредѣляемъ на основаніи неравенства

$$(\beta+\beta' a+\beta'' c)^2+(\beta' b+\beta'' d)^2 < 1. \tag{8}$$

Такъ какъ мы предполагаемъ, что существуютъ или неравенства (5) или (7), то во всякомъ случаѣ

$$|\beta' b+\beta'' d| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}}\,.$$

Слѣдовательно, всегда можно найти по крайней мѣрѣ одно значеніе β, удовлетворяющее неравенству (8). Для этого нужно только опредѣлить число β изъ неравенствъ

$$-\frac{1}{2} < \beta+\beta' a+\beta'' c < \frac{1}{2}\cdot$$

Если неравенству (8) удовлетворяютъ два значенія β, то изъ нихъ мы выберемъ то, при которомъ численное значеніе $\beta+\beta'\varphi+\beta''\psi$ наименьшее.

Число γ опредѣлимъ на основаніи условія

$$-\frac{1}{2} < \gamma+\gamma' a+\gamma'' c < \frac{1}{2}\cdot$$

Необходимо имѣть въ виду, что вслѣдствіе 4-го условія § 16 ни при какихъ раціональныхъ значеніяхъ t, t' и t'' равенство

$$t + t'a + t''c = 0$$

не можетъ имѣть мѣста. Слѣдовательно поставленными выше условіями цѣлыя числа β и γ вполнѣ опредѣляются.

Если окажется, что число $\beta + \beta'\varphi + \beta''\psi$ положительное, то преобразованіе кончено, и подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

приводитъ систему (1) къ виду, удовлетворяющему всѣмъ условіямъ леммы. Если число $\beta + \beta'\varphi + \beta''\psi$ отрицательное, то подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\gamma \\ 0 & -\beta' & -\gamma' \\ 0 & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

искомая.

§ 33.

Предположимъ, что t' и t'' какія нибудь цѣлыя раціональныя числа и мы желаемъ найти цѣлое число t, удовлетворяющее неравенству

$$(t + t'a + t''c)^2 + (t'b + t''d)^2 < 1. \tag{9}$$

Можетъ случиться, что этому неравенству будутъ удовлетворять два значенія t; изъ нихъ мы выберемъ то, при которомъ численное значеніе числа $t + t'\varphi + t''\psi$ будетъ наименьшимъ. Если неравенство (9) существуетъ при данныхъ значеніяхъ t, t' и t'', то оно будетъ также существовать и при значеніяхъ: $-t$, $-t'$ и $-t''$. Изъ чиселъ

$$t + t'\varphi + t''\psi \quad \text{и} \quad -t - t'\varphi - t''\psi$$

выберемъ то, которое положительно, и обозначимъ его черезъ ω.

Систему (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (1) мы будемъ называть системой, соотвѣтствующей комбинаціи (t', t'') значеній перемѣнныхъ X' и X''. При этомъ условимся не считать различными комбинаціи (t', t'') и $(-t', -t'')$.

Если при данныхъ значеніяхъ t' и t'' неравенство (9) невозможно, то будемъ говорить, что комбинація (t', t'') невозможна *).

*) Необходимо помнить, что раньше (§ 26) мы условились понимать слова: „система (ω, ω') соотвѣтствуетъ комбинаціи (t', t'')" въ другомъ смыслѣ. Тамъ, гдѣ мы будемъ пользоваться алгориѳмомъ, установленнымъ въ § 28, мы будемъ понимать эти слова такъ, какъ условились въ § 26.

Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ (1) преобразована въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1\ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \tag{10}$$

удовлетворяющую условіямъ леммы предыдущаго параграфа.

Мы желаемъ найти подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1, \tag{11}$$

которая преобразуетъ систему (10) въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \omega\ , & \pi \\ 1, & \omega', & \pi' \end{bmatrix}, \tag{12}$$

при чемъ эта система должна быть или приведенной системой 2-го рода, или должны существовать неравенства

$$0 < \omega < 1 \quad \text{и} \quad |\omega'| < 1.$$

Намъ извѣстно (§ 24), что при существованіи этихъ неравенствъ нельзя найти подстановки вида (11), которая преобразовала бы систему коваріантныхъ формъ (10) въ приведенную систему 2-го рода.

Когда система (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (10) найдена, опредѣленіе чиселъ q, q' и q'' въ подстановкѣ (11) не представляетъ затрудненій, такъ какъ, на основаніи § 22, эти числа опредѣляются только однимъ условіемъ: опредѣлитель подстановки (11) по численной величинѣ долженъ быть равенъ единицѣ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить, что система (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (10) есть искомая, если элементы ея удовлетворяютъ одному изъ слѣдующихъ условій:

или $0<\omega<1$ и $|\omega'|<1$, или (ω, ω') — 2-я система смежная съ $(1, 1)$.

Пользуясь этими условными терминами, мы слѣдующимъ образомъ формулируемъ алгориѳмъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована подстановкой вида (11) въ систему (12).

Алгориѳмъ.

Данная система коваріантныхъ формъ должна быть преобразована подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую условіямъ леммы § 32.

Если $\varphi < 1$ *или* $|\psi| < 1$ *и* $c^2+d^2 < 1$, *то вычисленія кончены, и одна изъ системъ* $(\varphi, a+bi)$ *и* $(\psi, c+di)$ *есть искомая. Въ томъ случаѣ, когда эти условія не выполнены, вычисленія нужно продолжать.*

I-й случай: $|d| < 1$.

Если $\psi > 1$, *то между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ* $(1, 0)$, $(0, 1)$ *и* $(1, -1)$ *перемѣнныхъ* X' *и* X'', *находится искомая система* (ω, ω').

Если $\psi < 1$, *то искомая система находится между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ* $(1, 0)$, $(1, -1)$ *и* $(1, 1)$.

II-й случай: $|d| \geqq 1$.

Если $\psi > 1$ *или* $b=0$, *то система* $(\varphi, a+bi)$ *искомая.*

Если $\psi < 1$ *и* $|b| > 0$, *то нужно найти цѣлое положительное число* δ, *опредѣляемое неравенствами*

$$|\delta b+d| < 1 \quad \text{и} \quad |(\delta-1)b+d| \geqq 1.$$

Если окажется, что $\delta > 3$, *то система* $(\varphi, a+bi)$ *искомая. Если* $\delta \leq 3$, *то искомая система находится среди системъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ* $(1, 0)$, $(\delta, 1)$ и $(\delta+1, 1)$.

Предположимъ, что при помощи этого алгориѳма опредѣлена искомая система (ω, ω'). Пусть

$$\omega = p+p'\varphi+p''\psi \quad \text{и} \quad \omega' = p+p'(a+bi)+p''(c+di).$$

Одно изъ чиселъ p' и p'' по численной величинѣ равно единицѣ.

Намъ нужно найти цѣлыя числа q, q' и q'', удовлетворяющія равенству

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Для бо́льшей опредѣленности условимся полагать $q=0$, $q'=0$ и $q''=1$, если только p' по численной величинѣ равно единицѣ. Если же p' по численной величинѣ не равно единицѣ, то будемъ полагать $q=0$, $q'=1$ и $q''=0$.

Мы предлагаемъ этотъ алгориѳмъ безъ доказательства. Извѣстное намъ доказательство довольно сложно, и потому мы его не приводимъ.

Замѣтимъ только, что всѣ вопросы, которые мы рѣшаемъ въ слѣдующихъ параграфахъ этого отдѣла, могутъ быть рѣшены, какъ при помощи 1-го алгориѳма, установленнаго въ § 28, такъ и при помощи 2-го алгориѳма. Въ примѣненіи къ численнымъ примѣрамъ оба алгориѳма оказываются одинаково удобными.

§ 34.

Предположимъ, что коэффиціенты системы

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\right] \tag{13}$$

зависятъ отъ корней неприводимаго уравненія

$$\rho^3 = r\rho + s \tag{14}$$

съ отрицательнымъ дискриминантомъ $D = -\Delta$.

Сохраняя обозначенія § 29, полагаемъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}, & \psi &= \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma} \\ a &= \frac{2(m+m''r)-m'\rho-m''\rho^2}{2\sigma}, & c &= \frac{2(n+n''r)-n'\rho-n''\rho^2}{2\sigma} \\ b &= \frac{m'-m''\rho}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2}, & d &= \frac{n'-n''\rho}{\sigma}\cdot\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2} \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

Составимъ систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \varphi-a, & \psi-c \\ b, & d \end{bmatrix}. \tag{16}$$

На основаніи равенствъ (15) получимъ

$$\varphi-a = \frac{-2m''r+3m'\rho+3m''\rho^2}{2\sigma} \quad \text{и} \quad \psi-c = \frac{-2n''r+3n'\rho+3n''\rho^2}{2\sigma}.$$

Систему коваріантныхъ формъ (16) замѣняемъ системой

$$\begin{bmatrix} m'+m''\left(\rho-\dfrac{2r}{3\rho}\right), & n'+n''\left(\rho-\dfrac{2r}{3\rho}\right) \\ m'-m''\rho, & n'-n''\rho \end{bmatrix}, \tag{17}$$

раздѣливъ числа $\varphi-a$ и $\psi-c$ на $\frac{3\rho}{2\sigma}$ и числа b и d на $\frac{\sqrt{3\rho^2-4r}}{2\sigma}$.

Если система (16) будетъ приведенной, то и система (17) будетъ приведенной и наоборотъ.

Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ (13) удовлетворяетъ условіямъ леммы § 32. На основаніи 1-го условія этой леммы существуютъ неравенства

$$|b| \leqq \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \text{и} \quad |d| > \sqrt{\frac{3}{4}},$$

такъ какъ равенство $\psi - c = 0$ невозможно. На основаніи равенствъ (15) находимъ

$$|m' - m''\rho| < \sigma\sqrt{\frac{3}{3\rho^2 - 4r}} \quad \text{и} \quad |n' - n''\rho| > \sigma\sqrt{\frac{3}{3\rho^2 - 4r}}. \tag{18}$$

Мы обозначаемъ Δ численное значеніе дискриминанта уравненія (14), и потому

$$(3\rho^2 - r)^2(3\rho^2 - 4r) = \Delta.$$

На основаніи неравенствъ (18) получаемъ

$$|m' - m''\rho| < \sigma(3\rho^2 - r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \quad \text{и} \quad |n' - n''\rho| > \sigma(3\rho^2 - r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}}.$$

Въ примѣненіи къ системамъ коваріантныхъ формъ, зависящимъ отъ корней уравненія (14), предложенный въ предыдущемъ параграфѣ алгориѳмъ можетъ быть формулированъ слѣдующимъ образомъ.

Должна быть найдена подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая данную систему коваріантныхъ формъ преобразуетъ въ систему

$$\left[1, \quad \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}, \quad \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma}\right],$$

удовлетворяющую слѣдующимъ условіямъ:

1) *Система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} m' + m''\left(\rho - \dfrac{2r}{3\rho}\right), & n' + n''\left(\rho - \dfrac{2r}{3\rho}\right) \\ m' - m''\rho, & n' - n''\rho \end{bmatrix}$$

приведенная система 1-го рода, при чемъ

$$|m' - m''\rho| < \sigma(3\rho^2 - r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \quad \text{и} \quad |n' - n''\rho| > \sigma(3\rho^2 - r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}};$$

числа

$$m' + m''\left(\rho - \frac{2r}{3\rho}\right) \quad \text{и} \quad n' + n''\left(\rho - \frac{2r}{3\rho}\right)$$

могутъ быть отрицательными.

2) $\varphi = \dfrac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma} > 0$ *и* a^2+b^2*=чис. союз.* $\dfrac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma} < 1$;

при этомъ, если $(-1+a)^2+b^2 < 1$, *то* $|-1+\varphi| > \varphi$.

3) $$|c| = \left|\frac{2(n+n''r)-n'\rho-n''\rho^2}{2\sigma}\right| < \frac{1}{2}.$$

Если окажется, что $\varphi < 1$ *или* $|\psi| < 1$ *и* $c^2+d^2 < 1$, *то вычисленія кончены, и одна изъ системъ* $(\varphi,\ a+bi)$, $(\psi,\ c+di)$ *искомая. Въ томъ случаѣ, когда эти условія не выполнены, вычисленія нужно продолжать.*

I-й случай: $|n'-n''\rho| < \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\dfrac{4}{\Delta}}$.

Если $\psi > 1$, *то одна изъ системъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ* (1, 0), (1, —1) *и* (0, 1), *есть искомая.*

Если $\psi < 1$, *то искомая система находится между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ* (1, 0), (1, —1) *и* (1, 1).

II-й случай: $|n'-n''\rho| > \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\dfrac{4}{\Delta}}$.

Если $\psi > 1$, *то система* $(\varphi,\ a+bi)$ *искомая.*

Если $\psi < 1$, *то нужно найти цѣлое положительное число* δ, *опредѣляемое неравенствами*

$$|\delta(m'-m''\rho)+n'-n''\rho| < \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}} \quad \text{и} \quad |(\delta-1)(m'-m''\rho)+n'-n''\rho| > \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}}.$$

Если окажется, что $\delta > 3$, *то система* $(\varphi,\ a+bi)$ *искомая. Если* $\delta \leq 3$, *то искомая система находится среди системъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ* (1, 0), $(\delta,\ 1)$ *и* $(\delta+1,\ 1)$.

Примѣръ I.

Дано уравненіе

$$\rho^3 = 2\rho+5.$$

Вычисляемъ

$$\rho \neq 2{,}09, \quad \rho^2 \neq 4{,}39 \quad \text{и} \quad \Delta = 643. \qquad (19)$$

На основаніи (19) находимъ

$$\rho-\frac{2r}{3\rho} \neq 1{,}45, \quad (3\rho^2-r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \neq 0{,}76 \quad \text{и} \quad (3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}} \neq 0{,}88. \qquad (20)$$

Преобразуемъ систему коваріантныхъ формъ

$$[1,\ \rho,\ \rho^2]$$

въ приведенную систему 2-го рода. Для этого составляемъ систему

$$\begin{bmatrix} m'+m''\left(\rho-\frac{2r}{3\rho}\right), & n'+n''\left(\rho-\frac{2r}{3\rho}\right) \\ m'-m''\rho, & n'-n''\rho \end{bmatrix}.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$m=0,\quad m'=1,\quad m''=0,\quad n=0,\quad n'=0,\quad n''=1 \quad \text{и} \quad \sigma=1, \qquad (21)$$

то получаемъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \rho-\frac{2r}{3\rho} \\ 1, & -\rho \end{bmatrix}.$$

На основанiи (19) и (20) получаемъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & 1{,}45 \\ 1, & -2{,}09 \end{bmatrix},$$

которую замѣняемъ системой

$$\begin{bmatrix} 100, & 145 \\ 100, & -209 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

Мы должны найти подстановку, которая преобразуетъ эту систему въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix},$$

при чемъ коэффицiенты этой системы должны удовлетворять, на основанiи (20) и (21), условiямъ

$$|\lambda'| < 76 \quad \text{и} \quad |\mu'| > 76. \qquad (23)$$

Подстановка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

преобразуетъ систему (22) въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 345, & 100 \\ -9, & 100 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую условiямъ (23). Въ системѣ коварiантныхъ формъ

$$[1,\ \rho,\ \rho^2]$$

дѣлаемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$|\beta+2a+c|<1 \quad \text{и} \quad |\gamma+a|<\frac{1}{2}.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ на основаніи равенствъ (15)

$$a=-\frac{\rho}{2} \quad \text{и} \quad c=\frac{4-\rho^2}{2},$$

то получаемъ неравенства

$$|\beta-2{,}28|<1 \quad \text{и} \quad |\gamma-1{,}05|<\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно $\beta=2$ или 3 и $\gamma=1$.

Полагая $\beta=2$, найдемъ, что

$$|2+2a+c|<\frac{1}{2},$$

и потому число союзное съ числомъ $2+2\rho+\rho^2$ меньше единицы. Если же положить $\beta=3$, то число $3+2\rho+\rho^2$ будетъ больше $2+2\rho+\rho^2$, и потому значеніе $\beta=3$ нужно отбросить.

Такимъ образомъ получаемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

которая систему коваріантныхъ формъ

$$[1,\ \rho,\ \rho^2]$$

преобразуетъ въ систему

$$[1,\ 2+2\rho+\rho^2,\ 1+\rho], \tag{24}$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ леммы § 32. Полагаемъ

$$m=2,\quad m'=2,\quad m''=1,\quad n=1,\quad n'=1,\quad n''=0 \quad \text{и} \quad \sigma=1.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $n'-n''\rho=1$, и такъ какъ на основаніи (20)

$$\sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}}\neq 0{,}88,$$

то

$$n'-n''\rho>\sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}}\,.$$

Слѣдовательно система коваріантныхъ формъ (24) удовлетворяетъ условіямъ II-го случая предложеннаго въ этомъ параграфѣ алгориѳма.

Согласно съ этимъ алгориемомъ вычисляемъ число $\psi=1+\rho$. Такъ какъ

$$\psi = 1+\rho \neq 3{,}09 > 1,$$

то система (φ, $a+bi$) есть искомая, и потому система коваріантныхъ формъ (24) — приведенная система 2-го рода.

Преобразуемъ систему (24) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приведя къ нормальному виду полученную систему, найдемъ систему

$$[1, \quad -2-\rho+\rho^2, \quad -2+\rho].$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что эта система подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему (24).

Слѣдующій рядъ системъ формъ и подстановокъ будетъ повторяться періодически *).

$$[1,\ 2+2\rho+\rho^2,\ 1+\rho] \quad (\mathrm{I}) \qquad\qquad [1,\ -2-\rho+\rho^2,\ -2+\rho]$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[1,\ -2-\rho+\rho^2,\ -2+\rho] \qquad\qquad [1,\ 2+2\rho+\rho^2,\ 1+\rho] \quad (\mathrm{I}) \text{ и т. д.}$$

Примѣръ II.

Дано уравненіе

$$\rho^3 = 19.$$

Вычисляемъ

$$\rho \neq 2{,}67, \quad \rho^2 \neq 7{,}12 \quad \text{и} \quad \Delta = 27.19^2. \tag{25}$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $r=0$, и потому

$$\rho - \frac{2r}{3\rho} \neq 2{,}67, \quad (3\rho^2-r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} = \frac{1}{\rho} \neq 0{,}37 \quad \text{и} \quad (3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}} \neq 0{,}43. \tag{26}$$

---

*) Сравн. періодъ приведенныхъ системъ 1-го рода, полученныхъ въ § 29 (примѣръ I, стр. 72).

Преобразуемъ систему

$$\left[1,\ \frac{3\rho}{3},\ \frac{1+\rho+\rho^2}{3}\right] \tag{27}$$

въ приведенную систему 2-го рода. Составляемъ соотвѣтствующую этой системѣ формъ бинарную систему

$$\begin{bmatrix} 3, & 1+\rho \\ 3, & 1-\rho \end{bmatrix}.$$

Эту систему замѣняемъ на основаніи (25) системой

$$\begin{bmatrix} 300, & 367 \\ 300, & -167 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\sigma = 3,\quad \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \neq 1{,}11 \quad \text{и} \quad \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}} \neq 1{,}29, \tag{29}$$

то мы должны преобразовать систему (28) въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix},$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\lambda'| < 111 \quad \text{и} \quad |\mu'| > 111.$$

Система (28) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1034, & 667 \\ -34, & 133 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

удовлетворяющую этимъ условіямъ.

Подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

преобразуемъ систему (27). Получимъ систему

$$\left[1,\ \beta+\frac{2+5\rho+2\rho^2}{3},\ \gamma+\frac{1+4\rho+\rho^2}{3}\right]. \tag{31}$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$\left|\beta+\frac{4-5\rho-2\rho^2}{6}\right|<1 \quad \text{и} \quad \left|\gamma+\frac{2-4\rho-\rho^2}{6}\right|<\frac{1}{2}.$$

Находимъ $\beta=3$ или 4 и $\gamma=3$.

Такъ какъ при значеніи $\beta=3$ число

$$\left|3+\frac{4-5\rho-2\rho^2}{6}\right|>\frac{1}{2},$$

то мы должны найти число союзное съ числомъ

$$3+\frac{2+5\rho+2\rho^2}{3}=\frac{11+5\rho+2\rho^2}{3}.$$

Получаемъ число

$$\frac{-23+7\rho+\rho^2}{3}\neq 0{,}94,$$

которое меньше единицы, и потому $\beta=3$. Система (31) обращается въ систему

$$\left[1,\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3},\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3}\right], \tag{32}$$

которая удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ леммы § 32.

Такъ какъ въ системѣ (30) коэффиціентъ 133 на основаніи (29) больше

$$100\sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}}\neq 129,$$

то система (32) удовлетворяетъ условіямъ II-го случая. Число

$$\phi=\frac{10+4\rho+\rho^2}{3}>1,$$

и потому система $(\varphi,\ a+bi)$ искомая. Оказывается такимъ образомъ, что система (32) есть приведенная система 2-го рода.

Преобразовавъ систему (32) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

получимъ систему

$$\left[1,\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36},\ \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}\right]. \tag{33}$$

Соотвѣтствующую этой системѣ бинарную систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} -1+5\rho, & 7+\rho \\ -1-5\rho, & 7-\rho \end{bmatrix}$$

замѣняемъ системой

$$\begin{bmatrix} 1235, & 967 \\ -1435, & 433 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $\sigma=36$ и на основаніи (26)

$$\sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{3}{\Delta}} \neq 13{,}32 \quad \text{и} \quad \sigma(3\rho^2-r)\sqrt{\frac{4}{\Delta}} \neq 15{,}48,$$

то система (34) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} 967, & 268 \\ 433, & -1868 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

удовлетворяющую 1-му условію леммы § 32. Такъ какъ кромѣ того коэффиціентъ системы (35): 1868 больше 1548, то мы имѣемъ дѣло со II-мъ случаемъ. Систему (33) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

въ систему

$$\left[1, \quad \frac{13+7\rho+\rho^2}{36}, \quad \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right], \tag{36}$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ леммы § 32.

Такъ какъ

$$\phi = \frac{4-2\rho+\rho^2}{9} \neq 0{,}64 < 1,$$

то согласно съ предложеннымъ алгориѳмомъ нужно найти цѣлое число δ, опредѣляемое неравенствами

$$|433\delta-1868| < 1548 \quad \text{и} \quad |433(\delta-1)-1868| > 1548.$$

Получаемъ $\delta=1$, и потому искомая нами система находится между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ (1, 0), (1, 1) и (2, 1). Безъ труда убѣждаемся, что система $(\varphi, a+bi)$, соотвѣтствующая комбинаціи (1, 0), есть искомая. Слѣдовательно система (36) есть приведенная система 2-го рода.

Подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

система (36) преобразуется въ систему

$$\left[1,\ \frac{-8+\rho+\rho^2}{3},\ \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}\right].$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что эта система подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ приведенную систему 2-го рода (32).

Слѣдующій рядъ системъ формъ и подстановокъ будетъ повторяться періодически *).

$$\left[1,\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3},\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3}\right] \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36},\ \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right] \text{(II)}$$

$$\left[1,\ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right] \text{(II)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-8+\rho+\rho^2}{3},\ \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 9 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3},\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3}\right] \text{(I) и т. д.}$$

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы данныя системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны.

§ 35.

Какъ при помощи алгориѳма, установленнаго въ § 28, такъ и при помощи алгориѳма, предложеннаго въ § 33, всегда можно найти приведенную систему того или другого рода эквивалентную данной системѣ коваріантныхъ формъ. Предположимъ, что дана система

*) Сравн. періодъ приведенныхъ системъ 1-го рода, полученныхъ въ § 29 (примѣръ II, стр. 76).

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{1}$$

и нельзя найти подстановки вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1, \tag{2}$$

которая преобразовала бы эту систему въ приведенную. Въ этомъ случаѣ можно найти, напримѣръ при помощи алгориѳма, установленнаго въ § 28, подстановку (2), которая данную систему преобразуетъ въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \tag{3}$$

при чемъ

$$0 < \varphi_1 < 1 \quad \text{и} \quad |a_1+b_1 i| < 1.$$

Систему (3) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ. Затѣмъ при помощи алгориѳма § 28 найдемъ подстановку вида (2), которая эту систему преобразуетъ въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_2, & \psi_2 \\ 1, & a_2+b_2 i, & c_2+d_2 i \end{bmatrix},$$

при чемъ эта система или будетъ приведенной системой 1-го рода или будутъ существовать неравенства

$$0 < \varphi_2 < 1 \quad \text{и} \quad |a_2+b_2 i| < 1.$$

Такимъ образомъ получимъ рядъ системъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2, & \psi_2 \\ 1, & a_2+b_2 i, & c_2+d_2 i \end{bmatrix}, \ldots \tag{4}$$

коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0 < \varphi_k < 1 \quad \text{и} \quad |a_k+b_k i| < 1, \quad (k=1,2,\ldots). \tag{5}$$

Обозначимъ

$$\omega_k = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_k \quad \text{и} \quad \omega'_k = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)\ldots(a_k+b_k i).$$

На основаніи неравенствъ (5) находимъ

$$0 < \omega_k < 1 \quad \text{и} \quad |\omega'_k| < 1, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что (ω_k, ω'_k) есть система значеній коваріантныхъ формъ (1), получаемая при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X, X' и X''. На основаніи неравенствъ (6) убѣждаемся, что число k не можетъ быть сколь угодно большимъ, и потому рядъ (4) состоитъ изъ конечнаго числа членовъ.

Предположимъ, что система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k, & \psi_k \\ 1, & a_k + b_k i, & c_k + d_k i \end{bmatrix}$$

есть послѣдній членъ ряда (4). Преобразуемъ эту систему подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ и найдемъ подстановку (2), которая преобразуетъ эту систему въ приведенную систему 1-го рода. Слѣдовательно, при помощи конечнаго числа дѣйствій можно найти приведенную систему 1-го рода эквивалентную данной системѣ коваріантныхъ формъ.

Если даны двѣ какія нибудь системы коваріантныхъ формъ и требуется узнать, эквивалентны ли эти системы или нѣтъ, то можно данныя системы замѣнить эквивалентными имъ приведенными системами, и нужно будетъ только узнать, эквивалентны ли эти приведенныя системы или нѣтъ.

Теорема. *Для того, чтобы системы коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a + bi, & c + di \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & a' + b'i, & c' + d'i \end{bmatrix} \tag{7}$$

были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы ряды соотвѣтственно эквивалентныхъ имъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1 + b_1 i, & c_1 + d_1 i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2, & \psi_2 \\ 1, & a_2 + b_2 i, & c_2 + d_2 i \end{bmatrix}, \ldots \tag{8}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi'_1, & \psi'_1 \\ 1, & a'_1 + b'_1 i, & c'_1 + d'_1 i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi'_2, & \psi'_2 \\ 1, & a'_2 + b'_2 i, & c'_2 + d'_2 i \end{bmatrix}, \ldots \tag{9}$$

удовлетворяли слѣдующимъ условіямъ:
или система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+j}, & \psi_{k+j} \\ 1, & a_{k+j} + b_{k+j} i, & c_{k+j} + d_{k+j} i \end{bmatrix} \tag{10}$$

ряда (8) *при всякомъ значеніи* $j = 1, 2, \ldots$ *можетъ быть преобразована подстановкой вида*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi'_j \;, & \psi'_j \\ 1, & a'_j + b'_j i, & c'_j + d'_j i \end{bmatrix} \qquad (12)$$

ряда (9), *или система*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_j \;, & \psi_j \\ 1, & a_j + b_j i, & c_j + d_j i \end{bmatrix}$$

при всякомъ значеніи $j = 1, 2, \ldots$ *можетъ быть преобразована въ систему*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi'_{h+j} & \psi'_{h+j} \\ 1, & a'_{h+j} + b'_{h+j} i, & c'_{h+j} + d'_{h+j} i \end{bmatrix}$$

подстановкой вида (11). *Здѣсь* k *и* h *нѣкоторыя цѣлыя числа, которыя могутъ быть равны нулю.*

Такимъ же условіямъ должны удовлетворять ряды, составленные изъ приведенныхъ системъ 2-го рода.

Условія теоремы очевидно достаточны для того, чтобы данныя системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны. Нужно только доказать, что эти условія необходимыя. Мы предполагаемъ, что приведенная система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \;, & \psi_1 \\ 1, & a_1 + b_1 i, & c_1 + d_1 i \end{bmatrix} \qquad (13)$$

эквивалентна первой изъ данныхъ системъ (7), а приведенная система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi'_1 \;, & \psi'_1 \\ 1, & a'_1 + b'_1 i, & c'_1 + d'_1 i \end{bmatrix} \qquad (14)$$

эквивалентна второй изъ системъ (7). Если системы (7) эквивалентны, то будутъ эквивалентны системы (13) и (14). Наоборотъ, если системы (13) и (14) эквивалентны, то системы (7) также будутъ эквивалентны.

Предположимъ, что система (13) преобразуется въ систему (14) подстановкой

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad (15)$$

Мы предполагаемъ, слѣдовательно, что система (13) послѣ подстановки (15) обращается въ систему

$$\begin{bmatrix} \tau, & \tau\varphi_1', & \tau\psi_1' \\ \tau', & \tau'(a_1'+b_1'i), & \tau'(c_1'+d_1'i) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Здѣсь

$$\tau = \alpha+\alpha'\varphi_1+\alpha''\psi_1 \quad \text{и} \quad \tau' = \alpha+\alpha'(a_1+b_1i)+\alpha''(c_1+d_1i).$$

Такъ какъ по условію система формъ (14) приведенная система 1-го рода, то система (16) также приведенная. Поэтому системы

$$(\tau, \tau') \quad \text{и} \quad [\tau\varphi_1', \tau'(a_1'+b_1'i)]$$

представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ (13), и при томъ система

$$[\tau\varphi_1', \tau'(a_1'+b_1'i)]$$

есть первая система смежная съ (τ, τ').

Можно предполагать, что τ число положительное, такъ какъ въ противномъ случаѣ можно измѣнить знаки всѣхъ коэффиціентовъ подстановки (15).

I-й случай: $0 < \tau \leqq 1$.

Предположимъ, что составленъ рядъ (I) (§ 20)

$$\ldots (\omega_{-1}, \omega_{-1}'), \quad (\omega_0, \omega_0'), \quad (\omega_1, \omega_1'), \ldots \tag{17}$$

послѣдовательныхъ относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (13).

Если $\omega_0 = 1$ и $\omega_0' = 1$, то, на основаніи § 24, существуютъ равенства

$$\left.\begin{matrix} \omega_0 = 1, & \omega_1 = \varphi_1, & \omega_2 = \varphi_1\varphi_2, \ldots \\ \omega_0' = 1, & \omega_1' = a_1+b_1i, & \omega_2' = (a_1+b_1i)(a_2+b_2i), \ldots \end{matrix}\right\}. \tag{18}$$

Такъ какъ системы

$$(\tau, \tau') \quad \text{и} \quad [\tau\varphi_1', \tau'(a_1'+b_1'i)]$$

находятся въ ряду (17) и $0 < \tau \leqq 1$, то можно обозначить

$$\tau = \omega_k, \quad \tau' = \omega_k \quad \text{и} \quad \tau\varphi_1' = \omega_{k+1}, \quad \tau'(a_1'+b_1'i) = \omega_{k+1}'. \tag{19}$$

Здѣсь $k \geqq 0$.

Съ другой стороны, на основаніи равенствъ (18) найдемъ

$$\omega_{k+1} = \omega_k\varphi_{k+1} \quad \text{и} \quad \omega_{k+1}' = \omega_k'(a_{k+1}+b_{k+1}i)$$

и, если обозначимъ

$$\nu_k = \omega_k\psi_{k+1} \quad \text{и} \quad \nu_k' = \omega_k'(c_{k+1}+d_{k+1}i),$$

то система

$$\begin{bmatrix} \omega_k, & \omega_{k+1}, & \nu_k \\ \omega'_k, & \omega'_{k+1}, & \nu'_k \end{bmatrix} \tag{20}$$

будетъ приведенной системой 1-го рода, получаемой изъ системы (13) послѣ нѣкоторой подстановки.

Система (16) получается изъ системы (13) послѣ подстановки (15), и потому система (16) получается изъ системы (20) послѣ нѣкоторой подстановки.. На основаніи равенствъ (19) и условій § 16 убѣждаемся, что эта подстановка имѣетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Приводя системы (20) и (16) къ нормальному виду, убѣждаемся, что система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+1} & , & \psi_{k+1} \\ 1, & a_{k+1}+b_{k+1}i, & & c_{k+1}+d_{k+1}i \end{bmatrix}$$

можетъ быть преобразована въ систему (14) подстановкой (21). Не трудно затѣмъ убѣдиться, что при всякомъ значеніи $j = 1, 2, \ldots$ система (10) можетъ быть преобразована въ систему (12) подстановкой вида (11).

II-й случай: $\tau > 1$.

Въ этомъ случаѣ система коваріантныхъ формъ (14) преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\tau}, & \frac{1}{\tau}\varphi_1 & , & \frac{1}{\tau}\psi_1 \\ \frac{1}{\tau'}, & \frac{1}{\tau'}(a_1+b_1 i), & & \frac{1}{\tau'}(c_1+d_1 i) \end{bmatrix}$$

подстановкой обратной подстановкѣ (15). Такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, убѣждаемся, что система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_j & , & \psi_j \\ 1, & a_j+b_j i, & & c_j+d_j i \end{bmatrix}$$

при всякомъ значеніи $j = 1, 2, \ldots$ можетъ быть преобразована въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi'_{h+j} & , & \psi'_{h+j} \\ 1, & a'_{h+j}+b'_{h+j}i, & & c'_{h+j}+d'_{h+j}i \end{bmatrix}$$

подстановкой вида (11).

Замѣчаніе. *Можно каждую приведенную систему 1-го рода при помощи подстановки* (11) *представлять въ такомъ видѣ, чтобы двѣ*

различныхъ приведенныхъ системы, полученныхъ такимъ образомъ, не могли быть преобразованы одна въ другую подстановкой вида (11). *Для того, чтобы въ этомъ случаѣ системы* (7) *были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали слѣдующія равенства:*

$$\left.\begin{array}{llll} \text{или} & \varphi_{k+j}=\varphi'_j,\ a_{k+j}+b_{k+j}i=a'_j+b'_ji & \text{и} & \psi_{k+j}=\psi'_j,\ c_{k+j}+d_{k+j}i=c'_j+d'_ji \\ \text{или} & \varphi_j=\varphi'_{h+j},\ a_j+b_ji=a'_{h+j}+b'_{h+j}i & \text{и} & \psi_j=\psi'_{h+j},\ c_j+d_ji=c'_{h+j}+d'_{h+j}i \end{array}\right\}.$$

Здѣсь $k \geqq 0$, $h \geqq 0$ *и* $j=1, 2, \ldots$

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ.

§ 36.

Теорема. *Для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ 1-го рода*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1i, & c_1+d_1i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2, & \psi_2 \\ 1, & a_2+b_2i, & c_2+d_2i \end{bmatrix}, \ldots \tag{1}$$

эквивалентныхъ данной системѣ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{2}$$

состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты системы (2): φ *и* ψ *были алгебраическія числа, зависящія отъ корня одного и того же неприводимаго уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ, а числа* $a+bi$ *и* $c+di$ *были бы алгебраическія числа соотвѣтственно сопряженныя съ числами* φ *и* ψ.

Предположимъ, что въ ряду (1) находятся двѣ тождественныхъ приведенныхъ системы 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k, & \psi_k \\ 1, & a_k+b_ki, & c_k+d_ki \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+n}, & \psi_{k+n} \\ 1, & a_{k+n}+b_{k+n}i, & c_{k+n}+d_{k+n}i \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Необходимо при этомъ имѣть въ виду, что мы не считаемъ различными приведенныя системы одного и того же рода, если одна изъ нихъ можетъ быть преобразована въ другую подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{4}$$

Если въ ряду (1) находятся такія двѣ системы (3), что одна изъ нихъ можетъ быть преобразована въ другую подстановкой вида (4), то мы будемъ предполагать, что это преобразованіе выполнено, и слѣдовательно существуютъ равенства

$$\varphi_{k+n}=\varphi_k,\ \psi_{k+n}=\psi_k \quad \text{и} \quad a_{k+n}+b_{k+n}i=a_k+b_ki,\ c_{k+n}+d_{k+n}i=c_k+d_ki. \qquad (5)$$

Предположимъ, что первая изъ системъ (3) преобразуется во вторую подстановкой

$$S=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}=\pm 1. \qquad (6)$$

Система

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_k\ , & \psi_k\\ 1, & a_k+b_ki, & c_k+d_ki\end{bmatrix}$$

на основаніи равенствъ (5) послѣ подстановки S приметъ видъ

$$\begin{bmatrix}E, & E\varphi_k\ , & E\psi_k\\ E', & E'(a_k+b_ki), & E'(c_k+d_ki)\end{bmatrix}.$$

Здѣсь

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha+\alpha'\varphi_k+\alpha''\psi_k=E\ , & \alpha+\alpha'(a_k+b_ki)+\alpha''(c_k+d_ki)=E'\\ \beta+\beta'\varphi_k+\beta''\psi_k=E\varphi_k, & \beta+\beta'(a_k+b_ki)+\beta''(c_k+d_ki)=E'(a_k+b_ki)\\ \gamma+\gamma'\varphi_k+\gamma''\psi_k=E\psi_k, & \gamma+\gamma'(a_k+b_ki)+\gamma''(c_k+d_ki)=E'(c_k+d_ki)\end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Обозначимъ черезъ E'' число сопряженное съ E'.

Исключая изъ равенствъ (7) числа φ_k и ψ_k, найдемъ уравненіе

$$\begin{vmatrix}\alpha-E & \alpha' & \alpha''\\ \beta & \beta'-E & \beta''\\ \gamma & \gamma' & \gamma''-E\end{vmatrix}=0 \qquad (8)$$

или въ развернутомъ видѣ:

$$-E^3+(\alpha+\beta'+\gamma'')E^2-(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'+\gamma''\alpha-\gamma\alpha''+\alpha\beta'-\alpha'\beta)E\pm 1=0.$$

Приходимъ къ заключенію, что E, E' и E'' сопряженныя алгебраическія единицы, удовлетворяющія уравненію 3-й степени.

Уравненіе (8) неприводимое, такъ какъ разлагаться на множители оно могло бы только въ случаѣ, когда $E=\pm 1$. Но на основаніи § 24 и равенствъ (7) находимъ

$$E=\varphi_k\varphi_{k+1}\dots\varphi_{k+n-1} \quad \text{и} \quad E'=(a_k+b_ki)(a_{k+1}+b_{k+1}i)\dots(a_{k+n-1}+b_{k+n-1}i).$$

Числа $\varphi_k,\ \varphi_{k+1},\dots\varphi_{k+n-1}$ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$0<\varphi_k<1,\quad 0<\varphi_{k+1}<1,\ \dots$$

и потому

$$0 < E < 1.$$

Числа E и E' сопряженныя комплексныя числа и дѣйствительными числами быть не могутъ, въ чемъ легко убѣдиться на основаніи равенствъ (7). Слѣдовательно дискриминантъ уравненія (8) число отрицательное.

Исключая изъ равенствъ

$$\alpha+\alpha'\varphi_k+\alpha''\psi_k=E \quad \text{и} \quad \beta+\beta'\varphi_k+\beta''\psi_k=E\varphi_k$$

число ψ_k, найдемъ

$$\varphi_k=\frac{\alpha''\beta-\alpha\beta''+\beta''E}{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'+\alpha''E}. \tag{9}$$

Исключая изъ равенствъ

$$\alpha+\alpha'\varphi_k+\alpha''\psi_k=E \quad \text{и} \quad \gamma+\gamma'\varphi_k+\gamma''\psi_k=E\psi_k$$

число φ_k, найдемъ

$$\psi_k=\frac{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha+\gamma'E}{\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'+\alpha'E}. \tag{10}$$

Такъ какъ уравненіе (8) неприводимое, то изъ равенствъ (9) и (10) слѣдуетъ, что φ_k и ψ_k алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія (8).

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$a_k+b_ki=\frac{\alpha''\beta-\alpha\beta''+\beta''E'}{\alpha'\beta''-\alpha''\beta'+\alpha''E'} \quad \text{и} \quad c_k+d_ki=\frac{\gamma\alpha'-\gamma'\alpha+\gamma'E'}{\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'+\alpha'E'},$$

и потому a_k+b_ki и c_k+d_ki алгебраическія числа соотвѣтственно сопряженныя съ числами φ_k и ψ_k. Не трудно доказать, что всѣ числа φ, φ_1, φ_2, ... принадлежатъ къ одной и той же кубической области и что $a+bi$, a_1+b_1i, a_2+b_2i, ... соотвѣтственно сопряженныя съ ними числа.

Замѣтимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ весь рядъ (1) состоитъ изъ періодически повторяющихся системъ

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_1, & \psi_1\\ 1, & a_1+b_1i, & c_1+d_1i\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1, & \varphi_2, & \psi_2\\ 1, & a_2+b_2i, & c_2+d_2i\end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix}1, & \varphi_n, & \varphi_n\\ 1, & a_n+b_ni, & c_n+d_ni\end{bmatrix}.$$

Предположимъ, что система

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_1, & \psi_1\\ 1, & a_1+b_1i, & c_1+d_1i\end{bmatrix} \tag{11}$$

подстановкой T преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_k, & \psi_k\\ 1, & a_k+b_ki, & c_k+d_ki\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Система (12) подстановкой S (6) преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} E, & E\varphi_k \ , & E\psi_k \\ E', & E'(a_k+b_k i), & E'(c_k+d_k i) \end{bmatrix}.$$

Эта система подстановкой T^{-1}, обратной T, очевидно преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} E, & E\varphi_1 \ , & E\psi_1 \\ E', & E'(a_1+b_1 i), & E'(c_1+d_1 i) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Слѣдовательно система (11) подстановкой TST^{-1} преобразуется въ систему (13). Обѣ эти системы приведенныя системы 1-го рода, и потому (E, E') система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (11). Такъ какъ $0 < E < 1$, то мы можемъ обозначить

$$E = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_m \quad \text{и} \quad E' = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)\ldots(a_m+b_m i), \tag{14}$$

т. е. системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{m+1} \ , & \psi_{m+1} \\ 1, & a_{m+1}+b_{m+1} i, & c_{m+1}+d_{m+1} i \end{bmatrix} \tag{15}$$

тождествены. Слѣдовательно весь рядъ (1) состоитъ изъ періодически повторяющихся системъ. На основаніи равенствъ (14) находимъ

$$E = \varphi_k\varphi_{k+1}\ldots\varphi_{k+m-1} \quad \text{и} \quad E' = (a_k+b_k i)(a_{k+1}+b_{k+1} i)\ldots(a_{k+m-1}+b_{k+m-1} i).$$

Раньше мы нашли, что

$$E = \varphi_k\varphi_{k+1}\ldots\varphi_{k+n-1} \quad \text{и} \quad E' = (a_k+b_k i)(a_{k+1}+b_{k+1} i)\ldots(a_{k+n-1}+b_{k+n-1} i),$$

слѣдовательно $m = n$.

Мы доказали такимъ образомъ, что рядъ (1) можетъ состоять изъ періодически повторяющихся членовъ только тогда, когда φ и ψ алгебраическія числа, зависящія отъ корня неприводимаго уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ, а числа $a+bi$ и $c+di$ соотвѣтственно сопряженныя съ ними числа.

Предположимъ теперь, что эти условія выполнены, т. е. коэффиціенты системы (2) зависятъ отъ корней неприводимаго уравненія

$$\rho^3 = r\rho + s \tag{16}$$

съ отрицательнымъ дискриминантомъ D.

Мы можемъ предполагать, что

$$\varphi = \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma} \quad \text{и} \quad \psi = \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}.$$

Систему (2) обозначимъ такъ же, какъ и въ § 29, символомъ

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\right]. \tag{17}$$

Обозначимъ еще

$$m'n''-m''n'=e.$$

Предположимъ, что Δ есть численное значеніе дискриминанта D уравненія (16). На основаніи формулы (7) § 29 имѣемъ

$$\varkappa=\frac{e}{\sigma^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2}. \tag{18}$$

Предположимъ, что приведенная система 1-го рода

$$\left[1,\ \frac{m_k+m'_k\rho+m''_k\rho^2}{\sigma_k},\ \frac{n_k+n'_k\rho+n''_k\rho^2}{\sigma_k}\right] \tag{19}$$

находится въ ряду (1) и получается изъ системы (2) или, что одно и то же, изъ системы (17) послѣ преобразованія при помощи подстановки

$$\begin{vmatrix}\alpha_k & \beta_k & \gamma_k\\ \alpha'_k & \beta'_k & \gamma'_k\\ \alpha''_k & \beta''_k & \gamma''_k\end{vmatrix}=\pm 1. \tag{20}$$

Система (17) послѣ подстановки (20) принимаетъ видъ

$$\left[\frac{l_{k0}+l'_{k0}\rho+l''_{k0}\rho^2}{\sigma},\ \frac{m_{k0}+m'_{k0}\rho+m''_{k0}\rho^2}{\sigma},\ \frac{n_{k0}+n'_{k0}\rho+n''_{k0}\rho^2}{\sigma}\right]. \tag{21}$$

Здѣсь

$$\left.\begin{aligned}\frac{l_{k0}+l'_{k0}\rho+l''_{k0}\rho^2}{\sigma}&=\alpha_k+\alpha'_k\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}+\alpha''_k\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\\ \frac{m_{k0}+m'_{k0}\rho+m''_{k0}\rho^2}{\sigma}&=\beta_k+\beta'_k\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}+\beta''_k\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\\ \frac{n_{k0}+n'_{k0}\rho+n''_{k0}\rho^2}{\sigma}&=\gamma_k+\gamma'_k\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}+\gamma''_k\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\end{aligned}\right\}.$$

На основаніи этихъ равенствъ и равенствъ (20) находимъ

$$\begin{vmatrix}l_{k0} & l'_{k0} & l''_{k0}\\ m_{k0} & m'_{k0} & m''_{k0}\\ n_{k0} & n'_{k0} & n''_{k0}\end{vmatrix}=\pm\begin{vmatrix}\sigma & 0 & 0\\ m & m' & m''\\ n & n' & n''\end{vmatrix}.$$

Слѣдовательно

$$\begin{vmatrix}l_{k0} & l'_{k0} & l''_{k0}\\ m_{k0} & m'_{k0} & m''_{k0}\\ n_{k0} & n'_{k0} & n''_{k0}\end{vmatrix}=\pm\sigma e. \tag{22}$$

Представимъ систему (21) въ нормальномъ видѣ. Для этого найдемъ число

$$\lambda_{k0} + \lambda'_{k0}\rho + \lambda''_{k0}\rho^2$$

союзное съ числомъ

$$l_{k0} + l'_{k0}\rho + l''_{k0}\rho^2$$

и обозначимъ норму числа

$$l_{k0} + l'_{k0}\rho + l''_{k0}\rho^2$$

черезъ L_k. Умножимъ числа

$$l_{k0} + l'_{k0}\rho + l''_{k0}\rho^2, \quad m_{k0} + m'_{k0}\rho + m''_{k0}\rho^2 \quad \text{и} \quad n_{k0} + n'_{k0}\rho + n''_{k0}\rho^2$$

на

$$\lambda_{k0} + \lambda'_{k0}\rho + \lambda''_{k0}\rho^2$$

и полученныя произведенія обозначимъ

$$L_k, \quad M_k + M'_k\rho + M''_k\rho^2, \quad N_k + N'_k\rho + N''_k\rho^2.$$

Легко убѣдиться въ справедливости слѣдующаго равенства

$$\begin{vmatrix} L_k & 0 & 0 \\ M_k & M'_k & M''_k \\ N_k & N'_k & N''_k \end{vmatrix} = \text{Norm}\,(\lambda_{k0} + \lambda'_{k0}\rho + \lambda''_{k0}\rho^2) \begin{vmatrix} l_{k0} & l'_{k0} & l''_{k0} \\ m_{k0} & m'_{k0} & m''_{k0} \\ n_{k0} & n'_{k0} & n''_{k0} \end{vmatrix},$$

и потому на основаніи равенства (22) найдемъ

$$M'_k N''_k - M''_k N'_k = \pm L_k \sigma e, \tag{23}$$

такъ какъ

$$\text{Norm}\,(\lambda_{k0} + \lambda'_{k0}\rho + \lambda''_{k0}\rho^2) = L_k^2.$$

Представивъ систему (21) въ нормальномъ видѣ, получаемъ систему

$$\left[1, \quad \frac{M_k + M'_k\rho + M''_k\rho^2}{L_k}, \quad \frac{N_k + N'_k\rho + N''_k\rho^2}{L_k}\right].$$

По условію эта система тождественна съ системой (19):

$$\left[1, \quad \frac{m_k + m'_k\rho + m''_k\rho^2}{\sigma_k}, \quad \frac{n_k + n'_k\rho + n''_k\rho^2}{\sigma_k}\right],$$

и потому необходимо:

$$M_k = m_k\delta,\ M'_k = m'_k\delta,\ M''_k = m''_k\delta,\ N_k = n_k\delta,\ N'_k = n'_k\delta,\ N''_k = n''_k\delta,\ L_k = \sigma_k\delta.$$

Здѣсь δ цѣлое раціональное число.

На основаніи равенства (23) получаемъ

$$m'_k n''_k - m''_k n'_k = \pm \sigma_k \frac{\sigma e}{\delta}$$

или, обозначая

$$m'_k n''_k - m''_k n'_k = e_k,$$

$$e_k = \pm \sigma_k \frac{\sigma e}{\delta}. \tag{24}$$

Обозначимъ на основаніи (18)

$$\varkappa_k = \frac{e_k}{\sigma_k^2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

На основаніи равенства (24) найдемъ

$$\sigma_k = \pm \frac{\sigma e}{\delta} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{2\varkappa_k}. \tag{25}$$

Мы предполагаемъ, что система (19) приведенная, и потому на основаніи § 30 существуетъ неравенство

$$|\varkappa_k| > \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

На основаніи равенства (25) находимъ

$$\sigma_k < \left|\frac{\sigma e}{\delta}\right| \sqrt{\frac{1}{3}\Delta} \tag{26}$$

и на основаніи (24)

$$|e_k| < \left|\frac{\sigma e}{\delta}\right|^2 \sqrt{\frac{1}{3}\Delta}. \tag{27}$$

Такъ какъ σ_k и e_k цѣлыя раціональныя числа, то приходимъ къ заключенію, что при всякомъ значеніи $k = 1, 2, \ldots$ численныя значенія σ_k и e_k не превосходятъ конечныхъ предѣловъ, зависящихъ отъ величинъ данныхъ.

Рядъ (1) приведенныхъ системъ 1-го рода состоитъ изъ безчисленнаго множества членовъ, и потому въ этомъ ряду можно найти сколько угодно системъ, у которыхъ численныя величины σ и e одинаковы. Но число такихъ различныхъ приведенныхъ системъ конечно. Въ этомъ убѣждаемся слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что

$$\left[1, \quad \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}, \quad \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma}\right] \tag{28}$$

одна изъ такихъ системъ, при чемъ

$$m'n'' - m''n' = e. \tag{29}$$

Найдемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1, \tag{30}$$

которая систему (28) преобразуетъ въ систему

$$\left[1,\ \frac{M+M'\rho}{\sigma},\ \frac{N+N'\rho+N''\rho^2}{\sigma}\right]; \tag{31}$$

числа β, β', β'', γ, γ' и γ'' можно выбрать такимъ образомъ, что будутъ выполнены слѣдующія условія:

$$\left.\begin{array}{c} M'N'' = |e| \text{ и } M'>0,\ N''>0. \\ 0 \leq M < \sigma,\ 0 \leq N' < M' \text{ и } 0 \leq N < \sigma. \end{array}\right\}. \tag{32}$$

Такъ какъ σ и $|e|$ не превосходятъ конечныхъ предѣловъ, то, на основаніи (32), коэффиціенты системы (31) конечныя числа, и потому число такихъ различныхъ системъ конечно. Не можетъ случиться, чтобы двѣ различныхъ системы ряда (1) подобнымъ образомъ можно было преобразовать въ одну и ту же систему (31). Предположимъ, что приведенныя системы 1-го рода

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\right] \text{ и } \left[1,\ \frac{m_1+m'_1\rho+m''_1\rho^2}{\sigma_1},\ \frac{n_1+n'_1\rho+n''_1\rho^2}{\sigma_1}\right] \tag{33}$$

можно преобразовать подстановками вида (30) въ одну и ту же систему (31). Въ этомъ случаѣ одна изъ системъ (33) преобразуется въ другую подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ 0 & \beta''_1 & \gamma''_1 \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{34}$$

И такъ какъ обѣ системы (33) приведенныя системы 1-го рода, то необходимо

$$\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma} = \frac{m_1+m'_1\rho+m''_1\rho^2}{\sigma_1};$$

слѣдовательно

$$\beta_1 = 0,\quad \beta'_1 = 1,\quad \beta''_1 = 0.$$

Подстановка (34) на основаніи этихъ равенствъ принимаетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Системы (33), которыя могутъ быть преобразованы одна въ другую подстановкой этого вида, мы не считаемъ различными.

Мы доказали такимъ образомъ, что въ безконечномъ ряду (1) число различныхъ системъ конечно, и потому въ этомъ ряду всегда найдутся двѣ тождественныхъ системы. Раньше мы показали, что, какъ только въ ряду (1) находятся двѣ тождественныхъ системы, весь этотъ

рядъ состоитъ изъ періодически повторяющихся системъ, при чемъ періодъ начинается съ перваго члена ряда.

О подстановкахъ, не измѣняющихъ системы коваріантныхъ формъ.

§ 37.

Предположимъ, что φ и ψ алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ. Пусть $a+bi$ и $c+di$ числа сопряженныя съ φ и ψ. Требуется найти всѣ подстановки, которыя не измѣняютъ системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\ , & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}. \tag{1}$$

При этомъ мы не считаемъ различными подстановки

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ -\alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ -\alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Численное значеніе опредѣлителей этихъ подстановокъ, какъ всегда, предполагаемъ равнымъ единицѣ.

Теорема. *Всѣ подстановки, не измѣняющія системы коваріантныхъ формъ* (1), *могутъ быть получены возвышеніемъ въ степень одной основной подстановки* *).

Опредѣлимъ періодъ различныхъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1\ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 1, & \varphi_n\ , & \psi_n \\ 1, & a_n+b_n i, & c_n+d_n i \end{bmatrix}$$

эквивалентныхъ данной системѣ (1) и предположимъ, что система (1) преобразуется въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1\ , & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix} \tag{2}$$

подстановкой T. Пусть подстановка σ_k преобразуетъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_k\ , & \psi_k \\ 1, & a_k+b_k i, & c_k+d_k i \end{bmatrix}$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_{k+1}\ , & \psi_{k+1} \\ 1, & a_{k+1}+b_{k+1} i, & c_{k+1}+d_{k+1} i \end{bmatrix}.$$

---

*) Ср. Ch. Hermite: „Sur la théorie des formes quadratiques" (Journal f. d. Mathematik. Bd. 47, S. 313).

Обозначимъ черезъ S подстановку

$$S = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n.$$

Такъ же, какъ въ § 13 отдѣла I, докажемъ, что каждая подстановка S_1, не измѣняющая системы (2), заключаются въ формѣ

$$S_1 = S^u,$$

гдѣ u цѣлое раціональное число положительное или отрицательное.

Обозначимъ

$$\Sigma = TST^{-1}.$$

Каждая подстановка Σ_1, не измѣняющая системы (1), заключается въ формѣ

$$\Sigma_1 = \Sigma^u.$$

Разысканіе алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ.

§ 38.

Предположимъ, что коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\,, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix} \tag{1}$$

зависятъ отъ корней уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ. Требуется найти всѣ алгебраическія единицы вида

$$e = t+t'\varphi+t''\psi \quad \text{и} \quad e' = t+t'(a+bi)+t''(c+di), \tag{2}$$

гдѣ t, t' и t'' цѣлыя раціональныя числа.

Относительно коэффиціентовъ системы (1) сдѣлаемъ слѣдующее предположеніе.

Если α, α' и α'' такія цѣлыя раціональныя числа, что $\alpha+\alpha'\varphi+\alpha''\psi$ цѣлое алгебраическое число, то, какія бы значенія ни имѣли цѣлыя раціональныя числа t, t' и t'', всегда можно найти цѣлыя раціональныя числа X, X' и X'', удовлетворяющія равенству:

$$(\alpha+\alpha'\varphi+\alpha''\psi)(t+t'\varphi+t''\psi) = X+X'\varphi+X''\psi.$$

Напримѣръ, система

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\,, & \psi \\ 1, & a+bi, & c+di \end{bmatrix}$$

будетъ удовлетворять поставленному условію, если форма

$$X\tau + X'\tau\varphi + X''\tau\psi$$

есть идеалъ области алгебраическихъ чиселъ, заключающихся въ формѣ

$$X + X'\varphi + X''\psi.$$

Мы видѣли въ § 36, что всякая подстановка e, не измѣняющая системы коваріантныхъ формъ (1), опредѣляетъ алгебраическую единицу вида (2). Въ разсматриваемомъ случаѣ всякой единицѣ вида (2) соотвѣтствуетъ подстановка съ цѣлыми коэффиціентами, не измѣняющая системы (1). Предположимъ, что Σ основная подстановка, а Σ_1 какая-нибудь другая подстановка, не измѣняющая системы (1). На основаніи § 37 получимъ

$$\Sigma_1 = \Sigma^u.$$

Если подстановки Σ и Σ_1 опредѣляютъ алгебраическія единицы E и E_1, то

$$E_1 = E^u;$$

слѣдовательно E есть основная единица *).

Для опредѣленія основной единицы E можно поступать слѣдующимъ образомъ. Нужно найти періодъ приведенныхъ системъ 1-го рода

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1+b_1 i, & c_1+d_1 i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1, & \varphi_2, & \psi_2 \\ 1, & a_2+b_2 i, & c_2+d_2 i \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 1, & \varphi_n, & \psi_n \\ 1, & a_n+b_n i, & c_n+d_n i \end{bmatrix}$$

эквивалентныхъ данной системѣ. Обозначивъ

$$E = \varphi_1\varphi_2 \ldots \varphi_n \quad \text{и} \quad E' = (a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i) \ldots (a_n+b_n i),$$

а черезъ E'' число сопряженное съ E', получимъ три сопряженныхъ основныхъ единицы E, E' и E''.

Примѣръ I.

Для уравненія $\rho^3 = 2\rho + 5$ мы опредѣлили (§ 29, стр. 72) періодъ приведенныхъ системъ 1-го рода, состоящій изъ одной системы

$$[1, \; -2+\rho, \; -2-\rho+\rho^2].$$

Поэтому

$$E = -2+\rho$$

есть основная алгебраическая единица **).

---

*) См. Lejeune Dirichlet: „Einige Resultate von Untersuchungen über eine Klasse homogener Functionen des dritten und der höheren Grade" (Werke, Bd. I, S. 630) и „Zur Theorie der complexen Einheiten" (тамъ же, стр. 642).

См. также Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" (§ 183. S. 590. Vierte Auflage) и Е. Золотаревъ: „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ съ приложеніемъ къ интегральному исчисленію" (С.-Петербургъ, 1874, стр. 35).

**) Основная алгебраическая единица для уравненія $\rho^3 = 2\rho + 5$ была получена

Примѣръ II.

Для уравненія $\rho^3 = 19$ мы опредѣлили (§ 34, стр. 96) періодъ, состоящій изъ двухъ приведенныхъ системъ 2-го рода:

$$\left[1,\ \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3},\ \frac{10+4\rho+\rho^2}{3}\right] \text{ и } \left[1,\ \frac{13+7\rho+\rho^2}{36},\ \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right],$$

и потому, умноживъ число $\frac{11+5\rho+2\rho^2}{3}$ на $\frac{13+7\rho+\rho^2}{36}$, получимъ основную единицу *):

$$E = \frac{14+5\rho+2\rho^2}{3}.$$

Примѣръ III.

Для того, чтобы показать, что предлагаемый нами способъ даетъ возможность находить безъ особенно большого труда даже такія алгебраическія единицы, величина которыхъ очень значительна, мы вычисляемъ основную алгебраическую единицу, зависящую отъ корня уравненія

$$\rho^3 = 23.$$

А. А. Марковымъ дана въ вышеупомянутой статьѣ для уравненія $\rho^3 = 23$ слѣдующая алгебраическая единица:

$$\varepsilon = 2\,166\,673\,601 + 761\,875\,860\rho + 267\,901\,370\rho^2.$$

Всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія $\rho^3 = 23$, заключаются въ формѣ

$$X + X'\rho + X''\rho^2.$$

Систему коваріантныхъ формъ

$$[1,\ \rho,\ \rho^2]$$

преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

въ приведенную систему 1-го рода

$$[1,\ -2+\rho,\ -5-\rho+\rho^2].$$

Charve'омъ при помощи алгориѳма Hermite'а. См. Charve: „De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré" (Suppl. au T. IX des Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. 1880, p. 69).

*) Эта алгебраическая единица дана А. А. Марковымъ въ статьѣ: „Sur les nombres entiers dépendants d'une racine cubique d'un nombre entier ordinaire". (Mémoires de l'Académie de St.-Pétersbourg, VII-e Série, T. XXXVIII, № 9, p. 33).

Эта система принадлежитъ къ періоду, состоящему изъ 21 приведенной системы 1-го рода. При вычисленіи приведенныхъ системъ, принадлежащихъ къ этому періоду, мы принимали ρ и ρ^2 равными:

$$\rho \neq 2{,}84 \quad \text{и} \quad \rho^2 \neq 8{,}09.$$

$$[1,\ -2+\rho,\ -5-\rho+\rho^2] \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3+9\rho-3\rho^2}{15}, \frac{4+2\rho+\rho^2}{15}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{15}, \frac{1+3\rho-\rho^2}{5}\right] \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{4}, \frac{5+3\rho+\rho^2}{4}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-3-\rho+\rho^2}{4}, -2+\rho\right] \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{7-2\rho+3\rho^2}{17}, \frac{8+5\rho+\rho^2}{17}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-9+5\rho+\rho^2}{17}, \frac{1+7\rho-2\rho^2}{17}\right] \qquad \text{(IV)}$$

$$\left[1, \frac{-9+5\rho+\rho^2}{17}, \frac{1+7\rho-2\rho^2}{17}\right] \qquad \text{(IV)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{4-3\rho+\rho^2}{10}, \frac{-1+2\rho+\rho^2}{10}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{4-3\rho+\rho^2}{10}, \frac{-1+\rho}{2}\right] \qquad \text{(V)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3+5\rho+3\rho^2}{16}, \frac{17+7\rho+\rho^2}{16}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{8}, \frac{-15+7\rho+\rho^2}{16}\right] \qquad \text{(VI)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{6}, \frac{1+\rho}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-2+\rho}{3}, \frac{-5-\rho+\rho^2}{6}\right] \qquad \text{(VII)}$$

$$\left[1, \frac{-2+\rho}{3}, \frac{-5-\rho+\rho^2}{6}\right] \qquad \text{(VII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1+3\rho-\rho^2}{10}, \frac{4+2\rho+\rho^2}{5}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1+3\rho-\rho^2}{10}, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{5}\right] \qquad \text{(VIII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3+3\rho}{3}, \frac{7+2\rho+\rho^2}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-5-\rho+\rho^2}{3}, -2+\rho\right] \qquad \text{(IX)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{7+2\rho+\rho^2}{2}, \frac{8+3\rho+\rho^2}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad \text{(X)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-2+9\rho-2\rho^2}{11}, \frac{1+\rho+\rho^2}{11}\right]$$

$$\left[1, \frac{-2+9\rho-2\rho^2}{11}, \frac{1+\rho+\rho^2}{11}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-10+\rho+\rho^2}{11}, \frac{-2+9\rho-2\rho^2}{11}\right] \qquad \text{(XI)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{5+\rho+\rho^2}{2}, \frac{7+3\rho+\rho^2}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, -2+\rho, \frac{-5-\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad \text{(XII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3+9\rho-3\rho^2}{30}, \frac{4+2\rho+\rho^2}{15}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{15}, \frac{1+3\rho-\rho^2}{10}\right] \qquad \text{(XIII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{8}, \frac{5+3\rho+\rho^2}{4}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{8}, -2+\rho\right] \qquad \text{(XIV)}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{8}, -2+\rho\right] \quad \text{(XIV)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-2-\rho+\rho^2}{3}, \frac{1+\rho}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-2+\rho}{3}, \frac{-2\rho+\rho^2}{3}\right] \quad \text{(XV)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \rho, \frac{4+2\rho+\rho^2}{5}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1+3\rho-\rho^2}{5}, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{5}\right] \quad \text{(XVI)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3+3\rho}{6}, \frac{7+2\rho+\rho^2}{6}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-2-\rho+\rho^2}{6}\right] \quad \text{(XVII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+10\rho-\rho^2}{33}, \frac{1+\rho+\rho^2}{11}\right]$$

$$\left[1, \frac{-1+10\rho-\rho^2}{33}, \frac{1+\rho+\rho^2}{11}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+10\rho-\rho^2}{33}, \frac{4-7\rho+4\rho^2}{33}\right] \quad \text{(XVIII)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-11+7\rho+\rho^2}{20}, \frac{7+\rho+3\rho^2}{20}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-11+7\rho+\rho^2}{20}, \frac{1+3\rho-\rho^2}{10}\right] \quad \text{(XIX)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{9-7\rho+2\rho^2}{31}, \frac{-2+5\rho+3\rho^2}{31}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{9-7\rho+2\rho^2}{31}, \frac{-33+5\rho+3\rho^2}{31}\right] \quad \text{(XX)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{6}, \frac{13+5\rho+\rho^2}{6}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-5-\rho+\rho^2}{6}, -2+\rho\right] \quad \text{(XXI)}$$

$\left[1, \frac{-5-\rho+\rho^2}{6}, -2+\rho\right]$ (XXI)	$[1, \ 7+2\rho+\rho^2, \ 8+3\rho+\rho^2]$
$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$
$[1, \ 7+2\rho+\rho^2, \ 8+3\rho+\rho^2]$	$[1, \ -2+\rho, \ -5-\rho+\rho^2]$ (I) и т. д.

Для того, чтобы получить основную алгебраическую единицу, нужно найти произведеніе слѣдующихъ чиселъ:

$$-2+\rho, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{15}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{4}, \frac{-9+5\rho+\rho^2}{17}, \frac{4-3\rho+\rho^2}{10}, \frac{1-\rho+\rho^2}{8}, \frac{-2+\rho}{3},$$

$$\frac{1+3\rho-\rho^2}{10}, \frac{-5-\rho+\rho^2}{3}, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-10+\rho+\rho^2}{11}, -2+\rho, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{15}, \frac{1-\rho+\rho^2}{8},$$

$$\frac{-2+\rho}{3}, \frac{1+3\rho-\rho^2}{5}, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-1+10\rho-\rho^2}{33}, \frac{-11+7\rho+\rho^2}{20}, \frac{9-7\rho+2\rho^2}{31}, \frac{-5-\rho+\rho^2}{6}.$$

Получаемъ такимъ образомъ:

$$E = -41399 - 3160\rho + 6230\rho^2.$$

Союзная съ E единица

$$EE' = 2\,166\,673\,601 + 761\,875\,860\rho + 267\,901\,370\rho^2$$

дана А. А. Марковымъ.

Объ идеалахъ, принадлежащихъ къ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ.

§ 39.

Предположимъ, что форма

$$X\lambda + X'\mu + X''\nu$$

есть идеалъ, принадлежащій къ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени

$$\rho^3 = r\rho + s \qquad (1)$$

съ отрицательнымъ дискриминантомъ $D = -\Delta$.

Пусть форма

$$X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1$$

другой идеалъ той же области.

Dedekind называетъ *) идеалы

$$X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1 \tag{2}$$

эквивалентными, если существуетъ алгебраическое число τ цѣлое или дробное, принадлежащее къ той же области, что и разсматриваемые идеалы, послѣ умноженія на которое одинъ идеалъ дѣлается тождественнымъ съ другимъ.

Слѣдовательно, если идеалы (2) эквивалентны, то идеалы

$$X\lambda + X'\mu + X''\nu \quad \text{и} \quad X\lambda_1\tau + X'\mu_1\tau + X''\nu_1\tau$$

тождествены, т. е. существуетъ подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая преобразуетъ линейную форму

$$X\lambda + X'\mu + X''\nu$$

въ линейную форму

$$X\lambda_1\tau + X'\mu_1\tau + X''\nu_1\tau.$$

Предположимъ, что системы коваріантныхъ формъ

$$[\lambda, \mu, \nu] \quad \text{и} \quad [\lambda_1, \mu_1, \nu_1] \tag{3}$$

соотвѣтствуютъ идеаламъ (2). На основаніи § 23 приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Для того, чтобы идеалы (2) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы системы коваріантныхъ формъ (3) были эквивалентны.

Всѣ эквивалентные идеалы составляютъ классъ идеаловъ, представителемъ котораго можно взять какой угодно идеалъ, принадлежащій къ классу. Извѣстно, что число различныхъ классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ — конечно **).

Предположимъ, что въ формѣ

$$X + X'\varphi + X''\psi \tag{4}$$

заключаются всѣ цѣлыя числа, зависящія отъ корня уравненія (1).

Пусть ω какое нибудь цѣлое алгебраическое число, принадлежащее къ разсматриваемой области. Dedekind называетъ идеалъ

*) См. Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" (§ 181. S. 573, Vierte Auflage).

**) Тамъ же: стр. 575.

$$X\omega + X'\omega\varphi + X''\omega\psi \qquad (5)$$

главнымъ. Этому идеалу соотвѣтствуетъ число ω.

Всякому идеалу вообще соотвѣтствуетъ нѣкоторое идеальное число. Главнымъ идеаламъ соотвѣтствуютъ идеальныя числа, представляющія обыкновенныя цѣлыя алгебраическія числа, принадлежащія къ разсматриваемой кубической области. Всѣмъ остальнымъ идеаламъ соотвѣтствуютъ идеальныя числа, представляющія только лишь символы.

Въ дальнѣйшемъ мы покажемъ, какъ при помощи предложеннаго нами алгориѳма можно узнать, эквивалентны ли данные идеалы (идеальныя числа) или нѣтъ, опредѣлить число различныхъ классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ (идеальныхъ чиселъ) и наконецъ найти алгебраическое число, соотвѣтствующее данному главному идеалу.

Каждый идеалъ можно представить при помощи различныхъ основаній. Если τ наибольшее цѣлое раціональное число, на которое дѣлится данный идеалъ, то этотъ же идеалъ можно представить въ видѣ *)

$$X\tau P + X'\tau P' \frac{M+\rho}{\delta} + X''\tau P'' \frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}. \qquad (6)$$

---

*) Въ сочиненіи нашемъ: „О цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени" (С.-Петербургъ. 1894 г.) мы доказали, что всѣ цѣлыя числа, зависящія отъ корня уравненія $\rho^3 = r\rho + s$, заключаются въ формѣ

$$X + X' \frac{-\xi+\rho}{\delta} + X'' \frac{\xi^2-r+\xi\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}.$$

Здѣсь $\delta = d$, если уравненіе $\rho_1^3 = \frac{r}{d^2}\rho_1 + \frac{s}{d^3}$ не особенное, и $\delta = 3d$, если уравненіе $\rho_1^3 = \frac{r}{d^2}\rho_1 + \frac{s}{d^3}$ особенное; d есть наибольшее число, для котораго возможны одновременно сравненія

$$r \equiv 0 \ (\text{mod. } d^2) \quad \text{и} \quad s \equiv 0 \ (\text{mod. } d^3);$$

σ есть наибольшее число, для котораго возможны одновременно сравненія

$$\xi^3 - r\xi - s \equiv 0 \ (\text{mod. } \delta^3\sigma^2) \quad \text{и} \quad 3\xi^2 - r \equiv 0 \ (\text{mod. } \delta^2\sigma);$$

ξ есть единственное рѣшеніе этихъ сравненій, опредѣляемое по модулю $\delta\sigma$.

Уравненіе $\rho_1^3 = \frac{r}{d^2}\rho_1 + \frac{s}{d^3}$ мы называемъ особеннымъ, если имѣютъ мѣсто сравненія

$$\frac{r}{d^2} \equiv 3 \ (\text{mod. } 9) \quad \text{и} \quad \frac{s}{d^3} \equiv \pm\left(1 - \frac{r}{d^2}\right) \ (\text{mod. } 27).$$

Всякому идеальному числу A, недѣлящемуся ни на какое цѣлое раціональное число, соотвѣтствуетъ идеалъ

$$XP + X'P' \frac{M+\rho}{\delta} + X''P'' \frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}.$$

Въ упомянутомъ сочиненіи данъ способъ для опредѣленія цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ P, P', P'', M, N и N' (глава III, § 44). Произведеніе положительныхъ чиселъ P, P' и P'' есть норма идеальнаго числа A и соотвѣтствующаго ему идеала. Тамъ же было показано, что P дѣлится на $P'P''$ и σ дѣлится на P''; $\frac{M+\rho}{\delta}$ и $P' \frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}$ цѣлыя алгебраическія числа, но

Мы можемъ разсматривать только такіе идеалы, которые не дѣлятся ни на какое цѣлое раціональное число, такъ какъ всѣ идеалы вида (6) при всякомъ значеніи τ очевидно эквивалентны.

Предположимъ, что идеальному числу A соотвѣтствуетъ идеалъ

$$XP + X'P'\frac{M+\rho}{\delta} + X''P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}. \tag{7}$$

Этому идеалу соотвѣтствуетъ система коваріантныхъ формъ

$$\left[P,\quad P'\frac{M+\rho}{\delta},\quad P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}\right]$$

или въ нормальномъ видѣ

$$\left[1,\quad \frac{P'}{P}\cdot\frac{M+\rho}{\delta},\quad \frac{P''}{P}\cdot\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}\right].$$

Обозначимъ

$$\delta\frac{P}{P'} = k \quad \text{и} \quad \delta P'\frac{\sigma}{P''} = k'. \tag{8}$$

Такъ какъ P дѣлится на P' и σ дѣлится на P'', то k и k' цѣлыя раціональныя числа. Получаемъ систему

$$\left[1,\quad \frac{M+\rho}{k},\quad \frac{N+N'\rho+\rho^2}{kk'}\right]. \tag{9}$$

Замѣтимъ, что форма

$$P\left(X + X'\frac{M+\rho}{k} + X''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{kk'}\right)$$

есть идеалъ (7).

Преобразуемъ систему (9) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{10}$$

Получимъ систему

$$\left[1,\quad \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\quad \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right], \tag{11}$$

гдѣ

$\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}$ — можетъ быть дробнымъ числомъ. Въ тѣхъ случаяхъ, когда P' и P'' имѣютъ общаго дѣлителя, $\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}$ — всегда дробное число.

$$m'n''-m''n'=\pm k'. \tag{12}$$

Коэффиціенты подстановки (10) выберемъ такимъ образомъ, чтобы система (11) или была приведенной системой того или другого рода, или существовали неравенства

$$0<\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}<1 \quad \text{и число союзное} \quad \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}<1.$$

Форма

$$P\left(X+X'\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}+X''\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right)$$

есть идеалъ (7), только представленный при помощи другого основанія.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить, что системы (9) и (11) соотвѣтствуютъ идеалу (7) и идеальному числу A.

Лемма. *Система коваріантныхъ формъ*

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right],$$

соотвѣтствующая нѣкоторому идеалу (идеальному числу), преобразуется каждой подстановкой

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}=\pm 1$$

въ систему вида

$$\left[1,\ \frac{m_1+m_1'\rho+m_1''\rho^2}{k_1k_1'},\ \frac{n_1+n_1'\rho+n_1''\rho^2}{k_1k_1'}\right],$$

которая также соотвѣтствуетъ нѣкоторому идеалу (идеальному числу).

Доказательство этой леммы не представляетъ никакихъ затрудненій.

Для того, чтобы узнать, эквивалентны ли данные идеалы (идеальныя числа), нужно только узнать, эквивалентны ли соотвѣтствующія имъ системы коваріантныхъ формъ. Этотъ вопросъ рѣшается на основаніи теоремы § 35.

Для того, чтобы опредѣлить число классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ (идеальныхъ чиселъ), нужно опредѣлить число классовъ не эквивалентныхъ системъ коваріантныхъ формъ имъ соотвѣтствующихъ.

Каждой системѣ соотвѣтствуетъ періодъ приведенныхъ системъ того или другого рода, и вопросъ объ опредѣленіи числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ (идеальныхъ чиселъ) сводится такимъ образомъ

въ опредѣленію различныхъ періодовъ приведенныхъ системъ, соотвѣтствующихъ идеаламъ разсматриваемой кубической области.

Теорема. *Число различныхъ періодовъ приведенныхъ системъ одного и того же рода, которыя соотвѣтствуютъ идеаламъ, принадлежащимъ къ области чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ — конечно.*

Предположимъ, что приведенная система 1-го или 2-го рода

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right] \tag{13}$$

соотвѣтствуетъ нѣкоторому идеалу. На основаніи (12)

$$m'n''-m''n'=\pm k'.$$

Раньше мы обозначили (§ 29):

$$\varkappa=\frac{m'n''-m''n'}{(kk')^2}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

и потому

$$|\varkappa|=\frac{1}{k^2k'}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2}.$$

По условію система (13) приведенная, и потому на основаніи § 30 имѣемъ

$$|\varkappa|>\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{1}{k^2k'}\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{2}>\sqrt{\frac{3}{4}}$$

и

$$k^2k'<\sqrt{\frac{1}{3}\Delta}. \tag{14}$$

Такъ какъ k и k' цѣлыя раціональныя положительныя числа, то на основаніи этого неравенства убѣждаемся въ томъ, что k и k' не превосходятъ конечныхъ предѣловъ. Намъ извѣстно (§ 36), что существуетъ конечное число различныхъ приведенныхъ системъ

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right],\ \left[1,\ \frac{m_1+m_1'\rho+m_1''\rho^2}{kk'},\ \frac{n_1+n_1'\rho+n_1''\rho^2}{kk'}\right],\ \ldots$$

гдѣ

$$m'n''-m''n'=\pm k',\quad m_1'n_1''-m_1''n_1'=\pm k',\ \ldots$$

Слѣдовательно существуетъ конечное число различныхъ приведенныхъ системъ, соотвѣтствующихъ идеаламъ разсматриваемой области.

Слѣдствіе. *Всегда можно найти идеалъ*

$$XP+X'P'\frac{M+\rho}{\delta}+X''P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma}, \tag{15}$$

эквивалентный данному идеалу и удовлетворяющій условію

$$\frac{P^2}{P'P''}\delta^3\sigma < \sqrt{\frac{1}{3}\Delta}. \tag{16}$$

Найдемъ приведенную систему (13) эквивалентную системѣ, соотвѣтствующей данному идеалу. Затѣмъ опредѣлимъ наименьшее положительное цѣлое раціональное число P, удовлетворяющее условію, что

$$P\left(X+X'\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}+X''\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right) \tag{17}$$

есть идеалъ. На основаніи вышеприведенной леммы, такое число P всегда можно найти. Идеалъ (17) представимъ въ видѣ (15), что, какъ извѣстно, всегда возможно.

На основаніи обозначеній (8) и неравенства (14) получимъ неравенство (16).

Для того, чтобы опредѣлить число классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ (идеальныхъ чиселъ), нужно выбрать среди идеаловъ, представленныхъ въ формѣ

$$XP+X'P'\frac{M+\rho}{\delta}+X''P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma},$$

тѣ идеалы, которые удовлетворяютъ условію

$$\frac{P^2}{P'P''}\delta^3\sigma < \sqrt{\frac{1}{3}\Delta}$$

и не дѣлятся ни на какое цѣлое раціональное число.

Число такихъ идеаловъ конечно. Тѣ изъ системъ коваріантныхъ формъ, соотвѣтствующихъ этимъ идеаламъ, которыя не могутъ быть сдѣланы приведенными подстановками вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

нужно отбросить, остальныя же системы нужно преобразовать въ приведенныя системы одного и того же рода. Всѣ эти системы распредѣляются на нѣсколько періодовъ. Число періодовъ равно числу различныхъ классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ разсматриваемой области.

Посмотримъ теперь, какъ примѣняется предложенный нами въ этомъ

отдѣлѣ алгориөмъ къ рѣшенію слѣдующаго вопроса: узнать, представляетъ ли данное идеальное число обыкновенное алгебраическое число, принадлежащее къ разсматриваемой нами области, или это идеальное число есть только символъ? Въ первомъ случаѣ идеальному числу соотвѣтствуетъ главный идеалъ, во второмъ случаѣ этотъ идеалъ не будетъ главнымъ.

Предположимъ, что данному идеальному числу A соотвѣтствуетъ система коваріантныхъ формъ

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right]. \tag{18}$$

Для того, чтобы идеалъ, соотвѣтствующій идеальному числу A, былъ главнымъ, необходимо и достаточно, чтобы система (18) была эквивалентна системѣ

$$[1,\ \varphi,\ \psi]. \tag{19}$$

Мы предполагаемъ, какъ и раньше, что въ формѣ $X+X'\varphi+X''\psi$ заключаются всѣ цѣлыя алгебраическія числа разсматриваемой области.

Предположимъ, что система (18) преобразуется въ систему (19) подстановкой

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{20}$$

Обозначимъ

$$\tau = \alpha+\alpha'\,\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}+\alpha''\,\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}. \tag{21}$$

Послѣ подстановки (20) система (18) принимаетъ видъ

$$[\tau,\ \tau\varphi,\ \tau\psi].$$

Поэтому, если P есть наименьшее цѣлое раціональное положительное число, удовлетворяющее условію, что форма

$$XP+X'P\,\frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'}+X''P\,\frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'} \tag{22}$$

есть идеалъ, то этотъ же идеалъ можно представить въ другой формѣ:

$$X\tau P+X'\tau P\varphi+X''\tau P\psi = \tau P(X+X'\varphi+X''\psi). \tag{23}$$

Идеалъ (22) по условію соотвѣтствуетъ идеальному числу A, и потому на основаніи (23)

$$A = \tau P.$$

Число τ при помощи предложеннаго нами алгориѳма опредѣляется какъ произведеніе нѣкоторыхъ чиселъ, которые мы обозначимъ:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_h.$$

Слѣдовательно

$$A = P\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_h.$$

Примѣръ I.

Найдемъ всѣ періоды приведенныхъ системъ 1-го рода, которыя соотвѣтствуютъ идеаламъ, зависящимъ отъ корня уравненія

$$\rho^3 = 2\rho+5.$$

Дискриминантъ этого уравненія $D = -643$, и потому $\Delta = 643$.

На основаніи неравенства

$$14 < \sqrt{\frac{1}{3}\,\Delta} < 15$$

приходимъ къ заключенію, что мы должны найти всѣ идеалы

$$XP+X'P'\frac{M+\rho}{\delta}+X''P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma},$$

удовлетворяющіе условію

$$\frac{P^2}{P'P''}\,\delta^3\sigma < 15 \tag{24}$$

и недѣлящіеся ни на какое цѣлое раціональное число.

Уравненіе $\rho^3 = 2\rho + 5$ не особенное, и потому $\delta=1$. Затѣмъ находимъ $\sigma=1$ и $\xi=0$. Неравенство (24) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{P^2}{P'P''} < 15. \tag{25}$$

Для того, чтобы найти всѣ идеалы, удовлетворяющіе этому неравенству, разложимъ на простые идеальные множители числа: 2, 3, 5, 7, 11 и 13.

Сохраняя обозначенія, принятыя въ нашемъ сочиненіи: „О цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ и т. д.“ (стр. 157), находимъ

$2 = (\pi,\ 2)\,(\pi_1,\ 2)$;	$7 =$ простое идеальное число;
$3 = (\pi,\ 3)\,(\pi_1,\ 3)$;	$11 = (\pi,\ 11)\,(\pi_1,\ 11)$;
$5 = (\pi,\ 5)\,(\pi_1,\ 5)$;	$13 = (\pi,\ 13)\,(\pi_1,\ 13)$.

Символомъ (π, p) обозначаемъ простое идеальное число 1-го порядка, а символомъ (π_1, p) простое идеальное число 2-го порядка.

При помощи таблицы идеаловъ и идеальныхъ чиселъ § 43 вышеупомянутаго сочиненія опредѣляемъ идеальныя числа, которымъ соотвѣтствуютъ идеалы, удовлетворяющіе условію (25). Самые идеалы не вычисляемъ, а только опредѣляемъ числа P, P' и P''. Полученные результаты помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Идеаль. числа	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''
1	1, 1, 1	$(\pi, 3)$	3, 1, 1	$(\pi_1, 13)$	13, 13, 1
$(\pi, 2)$	2, 1, 1	$(\pi_1, 3)$	3, 3, 1	$(\pi, 2)(\pi_1, 3)$	6, 3, 1
$(\pi_1, 2)$	2, 2, 1	$(\pi_1, 3)^2$	9, 9, 1	$(\pi_1, 2)(\pi_1, 3)$	6, 6, 1
$(\pi_1, 2)^2$	4, 4, 1	$(\pi_1, 5)$	5, 5, 1	$(\pi_1, 2)^2(\pi_1, 3)$	12, 12, 1
$(\pi_1, 2)^3$	8, 8, 1	$(\pi_1, 11)$	11, 11, 1	$(\pi_1, 2)(\pi_1, 5)$	10, 10, 1

Находимъ теперь идеалы, соотвѣтствующіе идеальнымъ числамъ, помѣщеннымъ въ таблицѣ. Системы коваріантныхъ формъ, соотвѣтствующія этимъ идеаламъ, преобразуемъ подстановками вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ приведенныя системы 1-го рода въ тѣхъ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно. Въ остальныхъ же случаяхъ опредѣляемъ системы вида

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right],$$

удовлетворяющія условіямъ:

$$0 < \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'} < 1 \quad \text{и число союзное} \quad \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'} < 1.$$

Полученные результаты помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣтств. системы формъ
1	$X+X'\rho+X''\rho^2$	$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2]$ *
$(\pi, 2)$	$X2+X'(-1+\rho)+X''(-1+\rho^2)$	$\left[1,\ \frac{-1+\rho}{2},\ \frac{-2-\rho+\rho^2}{2}\right]$ *
$(\pi_1, 2)$	$X2+X'2\rho+X''(-1+\rho+\rho^2)$	$\left[1,\ \frac{-1-\rho+\rho^2}{2},\ \frac{-5+\rho+\rho^2}{2}\right]$ *

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣтств. системы формъ
$(\pi_1, 2)^2$	$X\,4+X'\,4\rho+X''\,(-1-\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-1-\rho+\rho^2}{4}, -2+\rho\right]$
$(\pi_1, 2)^3$	$X\,8+X'\,8\rho+X''\,(-1+3\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-1-\rho+\rho^2}{4}, \frac{1+5\rho-\rho^2}{8}\right]$
$(\pi, 3)$	$X\,3+X'\,(-1+\rho)+X''\,(-1+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-\rho+\rho^2}{3}\right]$
$(\pi_1, 3)$	$X\,3+X'\,3\rho+X''\,(-1+\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{1+2\rho-\rho^2}{3}, \frac{-4+\rho+\rho^2}{3}\right]$ *
$(\pi_1, 3)^2$	$X\,9+X'\,9\rho+X''\,(2-2\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{2-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{-4+\rho+\rho^2}{3}\right]$
$(\pi_1, 5)$	$X\,5+X'\,5\rho+X''\,(-2+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-2+\rho^2}{5}, \frac{-1+5\rho-2\rho^2}{5}\right]$
$(\pi_1, 11)$	$X\,11+X'\,11\rho+X''\,(1+5\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{2-\rho+2\rho^2}{11}, \frac{-1+6\rho-\rho^2}{11}\right]$
$(\pi_1, 13)$	$X\,13+X'\,13\rho+X''\,(-6-3\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{6+3\rho-\rho^2}{13}, \frac{-11+\rho+4\rho^2}{13}\right]$
$(\pi, 2)\,(\pi_1, 3)$	$X\,6+X'\,3\,(-1+\rho)+X''\,(2+\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{1+2\rho-\rho^2}{6}, \frac{-4+\rho+\rho^2}{6}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi_1, 3)$	$X\,6+X'\,6\rho+X''\,(-1+\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-1+\rho+\rho^2}{6}, \frac{1+2\rho-\rho^2}{3}\right]$
$(\pi_1, 2)^2(\pi_1, 3)$	$X\,12+X'\,12\rho+X''\,(-1-5\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-1+\rho+\rho^2}{6}, \frac{-1-\rho+\rho^2}{4}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi_1, 5)$	$X\,10+X'\,10\rho+X''\,(3+5\rho+\rho^2)$	$\left[1, \frac{-2+\rho^2}{5}, \frac{-1-5\rho+3\rho^2}{10}\right]$

Приведенныя системы отмѣчены знакомъ * . Существуетъ, слѣдовательно, только 4 приведенныхъ системы 1-го рода, которыя соотвѣтствуютъ идеаламъ, принадлежащимъ къ области чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія $\rho^3 = 2\rho + 5$.

Эти четыре приведенныхъ системы принадлежатъ къ двумъ различнымъ періодамъ. Первый періодъ (α) состоитъ изъ одной системы:

$$[1, -2+\rho, \quad -2-\rho+\rho^2] \qquad \mathrm{I}(\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[1, 1+\rho, \quad 2+2\rho+\rho^2]$$

$$[1, 1+\rho, \quad 2+2\rho+\rho^2]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[1, -2+\rho, \quad -2-\rho+\rho^2] \qquad \mathrm{I}(\alpha)$$

Второй періодъ (β) состоитъ изъ трехъ системъ:

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-2-\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad \mathrm{I}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1+2\rho-\rho^2}{3}, \frac{-1+\rho+\rho^2}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1+2\rho-\rho^2}{3}, \frac{-4+\rho+\rho^2}{3}\right] \qquad \mathrm{II}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{2+2\rho}{2}, \frac{1+\rho+\rho^2}{2}\right]$$

$$\left[1, \frac{2+2\rho}{2}, \frac{1+\rho+\rho^2}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1-\rho+\rho^2}{2}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad \mathrm{III}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-\rho+\rho^2}{2}, \frac{1+\rho}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{-2-\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad \mathrm{I}(\beta)$$

Приходимъ къ заключенію, что въ разсматриваемомъ случаѣ всѣ идеальныя числа дѣлятся на два класса: (α) и (β). Къ классу (α) принадлежатъ всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія $\rho^3 = 2\rho + 5$.

Къ классу (β) принадлежатъ идеальныя числа, представляющія только лишь символы.

Изъ находящихся въ таблицѣ къ классу (α) принадлежатъ идеальныя числа:

$$1,\ (\pi_1, 2)^2,\ (\pi_1, 3)^2,\ (\pi_1, 5),\ (\pi, 2)(\pi_1, 3),\ (\pi_1, 2)(\pi_1, 3).$$

Найдемъ всѣ эти алгебраическія числа.

Идеальному числу $(\pi_1, 2)^2$ соотвѣтствуетъ система коваріантныхъ формъ

$$\left[1,\ \frac{-1-\rho+\rho^2}{4},\ -2+\rho\right].$$

Подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

эта система преобразуется въ систему

$$[1,\ -2-\rho+\rho^2,\ 1+\rho].$$

Эта система преобразуется подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

въ приведенную систему

$$[1,\ -2+\rho,\ -2-\rho+\rho^2].$$

Поэтому на основаніи предыдущаго

$$(\pi_1, 2)^2 = P\,\frac{-1-\rho+\rho^2}{4}.$$

Въ приведенной выше таблицѣ находимъ $P=4$, и потому

$$(\pi_1, 2)^2 = -1-\rho+\rho^2.$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$(\pi_1, 3)^2 = 2-2\rho+\rho^2,\quad (\pi_1, 5) = -2+\rho^2,\quad (\pi, 2)(\pi_1, 3) = 1+2\rho-\rho^2,$$
$$(\pi_1, 2)(\pi_1, 3) = -1+\rho+\rho^2.$$

Примѣръ II.

Найдемъ всѣ періоды приведенныхъ системъ 1-го рода, которыя соотвѣтствуютъ идеаламъ, зависящимъ отъ корня уравненія

$$\rho^3 = 19.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$\Delta = 27.19^2,\quad \sqrt{\frac{1}{3}\Delta} = 57,\quad \delta = 1,\quad \sigma = 3\quad \text{и}\quad \xi = 1. \tag{26}$$

Мы должны найти всѣ идеалы

$$XP + X'P'\,\frac{M+\rho}{\delta} + X''P''\,\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma},$$

удовлетворяющіе условію

$$\frac{P^2}{P'P''}\,\delta^3\sigma < \sqrt{\frac{1}{3}\,\Delta} \tag{27}$$

и недѣлящіеся ни на какое цѣлое раціональное число.

На основаніи (26) получаемъ

$$\frac{P^2}{P'P''} < 19. \tag{28}$$

Разложимъ на простые идеальные множители числа:

2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17.

Обозначая черезъ (π, p) и (π', p) простыя идеальныя числа 1-го порядка, а черезъ (π_1, p) простое идеальное число 2-го порядка, найдемъ:

$2 = (\pi, 2)(\pi_1, 2)$;

$3 = (\pi, 3)^2(\pi', 3)$;

$5 = (\pi, 5)(\pi_1, 5)$;

$7 =$ простое идеальное число;

$11 = (\pi, 11)(\pi_1, 11)$;

$13 =$ простое идеальное число;

$17 = (\pi, 17)(\pi_1, 17)$.

Опредѣляемъ идеальныя числа, которымъ соотвѣтствуютъ идеалы, удовлетворяющіе условію (28).

Идеаль. числ.	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''
1	1, 1, 1	$(\pi, 3)^4$	9, 9, 1	$(\pi_1, 2)(\pi, 3)^2$	6, 6, 1
$(\pi, 2)$	2, 1, 1	$(\pi', 3)$	3, 1, 1	$(\pi_1, 2)(\pi, 3)^4$	18, 18, 1
$(\pi, 2)^2$	4, 1, 1	$(\pi, 3)(\pi', 3)$	3, 1, 3	$(\pi_1, 2)(\pi', 3)$	6, 2, 1
$(\pi_1, 2)$	2, 2, 1	$(\pi_1, 5)$	5, 5, 1	$(\pi_1, 2)(\pi, 3)(\pi', 3)$	6, 2, 3
$(\pi_1, 2)^2$	4, 4, 1	$(\pi_1, 11)$	11, 11, 1	$(\pi_1, 2)(\pi_1, 5)$	10, 10, 1
$(\pi_1, 2)^3$	8, 8, 1	$(\pi_1, 17)$	17, 17, 1	$(\pi_1, 2)^2(\pi, 3)^2$	12, 12, 1
$(\pi_1, 2)^4$	16, 16, 1	$(\pi, 2)(\pi, 3)^2$	6, 3, 1	$(\pi_1, 2)^2(\pi, 3)(\pi', 3)$	12, 4, 3
$(\pi, 3)$	3, 1, 1	$(\pi, 2)(\pi, 3)(\pi', 3)$	6, 1, 3	$(\pi, 3)^2(\pi_1, 5)$	15, 15, 1
$(\pi, 3)^2$	3, 3, 1	$(\pi_1, 2)(\pi, 3)$	6, 2, 1	$(\pi, 3)(\pi', 3)(\pi_1, 5)$	15, 5, 3

Найдемъ теперь идеалы, соотвѣтствующіе идеальнымъ числамъ, помѣщеннымъ въ таблицѣ. Системы коваріантныхъ формъ, соотвѣтствующія этимъ идеаламъ, преобразуемъ въ приведенныя системы 1-го рода подстановками вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ тѣхъ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно.

Полученные результаты помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣт. системы формъ	
1	$X+X'\rho+X''\frac{1+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}, -2+\rho\right]$	*
$(\pi, 2)$	$X2+X'(-1+\rho)+X''\frac{-2+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{1-2\rho+\rho^2}{6}\right]$	*
$(\pi, 2)^2$	$X4+X'(1+\rho)+X''\frac{4+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{1+\rho}{4}, \frac{-8+\rho+\rho^2}{12}\right]$	
$(\pi_1, 2)$	$X2+X'2\rho+X''\frac{1+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{6}\right]$	*
$(\pi_1, 2)^2$	$X4+X'4\rho+X''\frac{1-5\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{12}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right]$	*
$(\pi_1, 2)^3$	$X8+X'8\rho+X''\frac{1-5\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{24}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right]$	
$(\pi_1, 2)^4$	$X16+X'16\rho+X''\frac{-23-5\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{23+5\rho-\rho^2}{48}, \frac{-21+\rho+3\rho^2}{16}\right]$	
$(\pi, 3)$	$X3+X'(-1+\rho)+X''\frac{1+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right]$	*
$(\pi, 3)^2$	$X3+X'3\rho+X''\frac{4-2\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{-19+5\rho+2\rho^2}{9}\right]$	*
$(\pi, 3)^4$	$X9+X'9\rho+X''\frac{-5+7\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-5+7\rho+\rho^2}{27}, \frac{-20+\rho+4\rho^2}{27}\right]$	
$(\pi', 3)$	$X3+X'(-1+\rho)+X''\frac{-2+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-2+\rho+\rho^2}{9}, \frac{-1+\rho}{3}\right]$	
$(\pi, 3)(\pi', 3)$	$X3+X'(-1+\rho)+X''3\frac{-1+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{3}\right]$	*

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣт. системы формъ
$(\pi_1, 5)$	$X\,5+X'\,5\rho+X''\,\frac{1+4\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-14+4\rho+\rho^2}{15}, \frac{-2+7\rho-2\rho^2}{15}\right]$ *
$(\pi_1, 11)$	$X\,11+X'\,11\rho+X''\,\frac{4+13\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{8-7\rho+2\rho^2}{33}, \frac{-7+2\rho+\rho^2}{11}\right]$
$(\pi_1, 17)$	$X\,17+X'\,17\rho+X''\,\frac{13+25\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{26-\rho+2\rho^2}{51}, \frac{-13+9\rho-\rho^2}{17}\right]$
$(\pi, 2)\,(\pi, 3)^2$	$X\,6+X'\,3\,(-1+\rho)+X''\,\frac{-5-2\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{5+2\rho-\rho^2}{18}, \frac{-14+7\rho+\rho^2}{18}\right]$
$(\pi, 2)\,(\pi, 3)\,(\pi', 3)$	$X\,6+X'\,(-1+\rho)+X''\,3\,\frac{-1+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{6}, \frac{-\rho+\rho^2}{6}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi, 3)$	$X\,6+X'\,2\,(-1+\rho)+X''\,\frac{1+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{1+\rho+\rho^2}{18}, \frac{11+5\rho-\rho^2}{18}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi, 3)^2$	$X\,6+X'\,6\rho+X''\,\frac{-5+7\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right]$ *
$(\pi_1, 2)\,(\pi, 3)^4$	$X\,18+X'\,18\rho+X''\,\frac{-5+7\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-5+7\rho+\rho^2}{54}, \frac{-35-5\rho+7\rho^2}{54}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi', 3)$	$X\,6+X'\,2\,(-1+\rho)+X''\,\frac{7+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{5+5\rho-\rho^2}{18}, \frac{7+\rho+\rho^2}{18}\right]$
$(\pi_1, 2)\,(\pi, 3)\,(\pi', 3)$	$X\,6+X'\,2\,(-1+\rho)+X''\,3\,\frac{1+\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{6}\right]$ *
$(\pi_1, 2)\,(\pi_1, 5)$	$X\,10+X'\,10\rho+X''\,\frac{1-11\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{1-\rho+\rho^2}{10}, \frac{-1+11\rho-\rho^2}{30}\right]$
$(\pi_1, 2)^2\,(\pi, 3)^2$	$X\,12+X'\,12\rho+X''\,\frac{13+7\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}, \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right]$ *
$(\pi_1, 2)^2\,(\pi, 3)\,(\pi', 3)$	$X\,12+X'\,4\,(-1+\rho)+X''\,3\,\frac{-3-\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{-3-\rho+\rho^2}{12}, \frac{-1+\rho}{3}\right]$
$(\pi, 3)^2\,(\pi_1, 5)$	$X\,15+X'\,15\rho+X''\,\frac{-14-11\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{14+11\rho-\rho^2}{45}, \frac{-11+\rho+4\rho^2}{45}\right]$
$(\pi, 3)\,(\pi', 3)\,(\pi_1, 5)$	$X\,15+X'\,5\,(-1+\rho)+X''\,3\,\frac{6-\rho+\rho^2}{3}$	$\left[1, \frac{6-\rho+\rho^2}{15}, \frac{-1+\rho}{3}\right]$

Приведенныя системы отмѣчены знакомъ * . Эти 11 приведенныхъ системъ принадлежатъ къ тремъ различнымъ періодамъ.

Первый періодъ (α) состоитъ изъ двухъ системъ:

$$\left[1, \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}, -2+\rho\right] \quad \text{I}(\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}, \frac{13+7\rho+\rho^2}{36}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}, \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right] \quad \text{II}(\alpha)$$

$$\left[1, \frac{-23+7\rho+\rho^2}{36}, \frac{-7-\rho+5\rho^2}{36}\right] \quad \text{II}(\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{10+4\rho+\rho^2}{3}, \frac{11+5\rho+2\rho^2}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{1-2\rho+\rho^2}{3}, -2+\rho\right] \quad \text{I}(\alpha)$$

Второй періодъ (β) состоитъ изъ 5-ти системъ:

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{1-2\rho+\rho^2}{6}\right] \quad \text{I}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{1+\rho+\rho^2}{9}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}\right] \quad \text{II}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-5+7\rho+\rho^2}{18}, \frac{1+\rho+\rho^2}{6}\right]$$

$$\left[1, \frac{-5+7\rho+\rho^2}{18}, \frac{1+\rho+\rho^2}{6}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right] \quad \text{III}(\beta)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{3-\rho+\rho^2}{6}, \frac{2+\rho}{3}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{6}\right] \quad \text{IV}(\beta)$$

$\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{6}\right]$ IV(β) $\left[1, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{12}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right]$ V(β)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\left[1, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{12}, \frac{1+\rho+\rho^2}{6}\right]$ $\left[1, \frac{1+\rho}{2}, \frac{4+\rho+\rho^2}{6}\right]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\left[1, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{12}, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}\right]$ V(β) $\left[1, \frac{-1+\rho}{2}, \frac{1-2\rho+\rho^2}{6}\right]$ I(β)

Третій періодъ (γ) состоитъ изъ 4-хъ системъ:

$\left[1, \frac{-5+\rho+\rho^2}{6}, \frac{-1+5\rho-\rho^2}{6}\right]$ I(γ) $\left[1, \frac{4-2\rho-\rho^2}{9}, \frac{-19+5\rho-2\rho^2}{9}\right]$ III(γ)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\left[1, \frac{6-3\rho+3\rho^2}{15}, \frac{1+4\rho+\rho^2}{15}\right]$ $\left[1, \frac{-\rho+\rho^2}{3}, \frac{2+\rho}{3}\right]$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\left[1, \frac{-14+4\rho+\rho^2}{15}, \frac{-2+7\rho-2\rho^2}{15}\right]$ II(γ) $\left[1, \frac{-1+\rho}{3}, \frac{-3-\rho+\rho^2}{3}\right]$ IV(γ)

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\left[1, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{8+5\rho+2\rho^2}{9}\right]$ $\left[1, \frac{-1-5\rho-\rho^2}{6}, \frac{1+\rho-\rho^2}{6}\right]$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & -1 & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & 1 \\ [illegible] & 1 & 0 \end{matrix}$$

$\left[1, \frac{4-2\rho+\rho^2}{9}, \frac{-19-5\rho-2\rho^2}{9}\right]$ III(γ) $\left[1, \frac{-5-\rho-\rho^2}{6}, \frac{-1-5\rho-\rho^2}{6}\right]$ I(γ)

Приходимъ къ заключенію, что въ разсматриваемомъ случаѣ существуетъ три класса не эквивалентныхъ идеальныхъ чиселъ *).

Классъ (α) составляютъ всѣ алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія $\rho^3 = 19$.

Изъ находящихся въ таблицѣ идеальныхъ чиселъ къ классу (α) принадлежатъ числа:

$$1,\ (\pi_1, 2)^3,\ (\pi_1, 11),\ (\pi, 2)(\pi, 3)(\pi', 3),\ (\pi, 2)(\pi, 3)^2,\ (\pi_1, 2)^2(\pi, 3)^2,$$
$$(\pi_1, 2)^2(\pi, 3)(\pi', 3),\ (\pi_1, 2)(\pi, 3),\ (\pi_1, 2)(\pi', 3),\ (\pi_1, 2)(\pi, 3)^4.$$

Указаннымъ выше способомъ находимъ:

$$(\pi_1, 2)^3 = \frac{-1+5\rho-\rho^2}{3},\ (\pi_1, 11) = \frac{8-7\rho+2\rho^2}{3},\ (\pi, 2)(\pi, 3)(\pi', 3) = -1+\rho,$$
$$(\pi, 2)(\pi, 3)^2 = \frac{5+2\rho-\rho^2}{3},\ (\pi_1, 2)^2(\pi, 3)^2 = \frac{-23+7\rho+\rho^2}{3},$$
$$(\pi_1, 2)^2(\pi, 3)(\pi', 3) = -3-\rho+\rho^2,\ (\pi_1, 2)(\pi, 3) = \frac{1+\rho+\rho^2}{3},$$
$$(\pi_1, 2)(\pi', 3) = \frac{11-\rho-\rho^2}{3},\ (\pi_1, 2)(\pi, 3)^4 = \frac{-5+7\rho+\rho^2}{3}.$$

Къ классу (β) принадлежатъ идеальныя числа:

$$(\pi, 2),\ (\pi_1, 2)^2,\ (\pi_1, 2)(\pi, 3)(\pi', 3),\ (\pi_1, 2)(\pi, 3)^2,\ (\pi, 3),\ (\pi', 3),$$
$$(\pi, 3)^4,\ (\pi_1, 2)(\pi_1, 5),\ (\pi, 3)^2(\pi_1, 5),\ (\pi, 3)(\pi', 3)(\pi_1, 5)$$ и т. д.

Къ классу (γ) принадлежатъ идеальныя числа:

$$(\pi_1, 2),\ (\pi, 3)^2,\ (\pi, 3)(\pi', 3),\ (\pi_1, 5),\ (\pi, 2)^2,\ (\pi_1, 2)^4,\ (\pi_1, 17)$$ и т. д.

---

*) Число классовъ не эквивалентныхъ идеальныхъ чиселъ для уравненія $\rho^3 = 19$ было опредѣлено А. А. Марковымъ въ вышеупомянутой статьѣ (стр. 31).

ОТДѢЛЪ III.

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ $\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu$, $\omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu'$ и $\omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu''$ при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ.

О системѣ коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{bmatrix}.$$

§ 40.

Въ этомъ отдѣлѣ мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad \text{и} \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu'', \qquad (1)$$

коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

1) $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu', \lambda'', \mu'', \nu''$ дѣйствительныя числа;

2) опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{vmatrix} = \varkappa$$

не равенъ нулю;

3) системы (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') и $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ неприводимыя.

Символомъ

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{bmatrix}$$

обозначимъ систему коваріантныхъ формъ (1).

Относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 41.

Опредѣленіе. *Пусть при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ* X, X' *и* X'' *коваріантныя формы*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad и \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu'' \qquad (1)$$

получаютъ такія значенія ω_0, ω'_0 *и* ω''_0, *что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ* t, t' *и* t'', *которыя удовлетворяли бы одновременно неравенствамъ*

$$|t\lambda + t'\mu + t''\nu| < |\omega_0|, \quad |t\lambda' + t'\mu' + t''\nu'| < |\omega'_0| \quad и \quad |t\lambda'' + t'\mu'' + t''\nu''| < |\omega''_0|.$$

Условимся называть такія числа ω_0, ω'_0 *и* ω''_0 *относительными minima'ми системы коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} \lambda\,, & \mu\,, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Значенія коваріантныхъ формъ (1) *равныя нулю исключаются изъ разсмотрѣнія.*

§ 42.

Обозначимъ черезъ (S) совокупность всѣхъ системъ относительныхъ minima, при чемъ условимся системы $(\omega, \omega', \omega'')$ и $(-\omega, -\omega', -\omega'')$ считать за одну систему.

Лемма I. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ конечное число системъ, элементы которыхъ* ω, ω' *и* ω'' *по численной величинѣ меньше данныхъ чиселъ* ε, ε' *и* ε''.

Лемма II. *Если система* $(\omega, \omega', \omega'')$ *значеній коваріантныхъ формъ* (1) *не принадлежитъ къ совокупности* (S), *то среди системъ совокупности* (S) *можно найти систему* $(\omega_k, \omega'_k, \omega''_k)$, *элементы которой меньше чиселъ* $|\omega|$, $|\omega'|$ *и* $|\omega''|$.

Лемма III. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ безчисленное множество системъ* $(\omega, \omega', \omega'')$, *элементы которыхъ* ω' *и* ω'' *по численной величинѣ меньше* ε' *и* ε''.

Лемма IV. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ безчисленное множество системъ* $(\omega, \omega', \omega'')$, *первый элементъ которыхъ* ω *по численной величинѣ не меньше* ε.

Лемма V. *Къ совокупности* (S) *принадлежитъ конечное число системъ* $(\omega, \omega', \omega'')$, *элементы которыхъ* ω' *и* ω'' *удовлетворяютъ условіямъ:*

$$\varepsilon' \leqq |\omega'| < \varepsilon'_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon'' \leqq |\omega''| < \varepsilon''_1.$$

Доказательство этихъ леммъ не представляетъ затрудненій.

О смежныхъ системахъ совокупности (S).

§ 43.

Опредѣленіе. *Если система* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ *принадлежитъ къ совокупности* (S), *то всегда можно найти только одну систему* $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ *значеній коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad \text{и} \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu'', \tag{1}$$

элементы которой удовлетворяютъ слѣдующимъ 2-мъ условіямъ:

1) $$|\omega'_1| < |\omega'_0| \quad \text{и} \quad |\omega''_1| < |\omega''_0|; \tag{2}$$

2) *ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* t, t' *и* t'' *неравенства*

$$|t\lambda + t'\mu + t''\nu| < |\omega_1|, \quad |t\lambda' + t'\mu' + t''\nu'| < |\omega'_0| \quad \text{и} \quad |t\lambda'' + t'\mu'' + t''\nu''| < |\omega''_0| \tag{3}$$

не могутъ существовать одновременно.

Система $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ *принадлежитъ къ совокупности* (S), *и эту систему мы называемъ первой системой смежной съ системой* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$.

Систему $(\omega_2, \omega'_2, \omega''_2)$ *мы называемъ второй системой смежной съ* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$, *если элементы ея удовлетворяютъ 1-му и 2-му условіямъ, когда въ неравенствахъ* (2) *и* (3) *произведена круговая замѣна буквъ:* ω *на* ω', ω' *на* ω'' *и* ω'' *на* ω.

Систему $(\omega_3, \omega'_3, \omega''_3)$ *мы называемъ третьей системой смежной съ* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$, *если элементы ея удовлетворяютъ 1-му и 2-му условіямъ, когда въ неравенствахъ* (2) *и* (3) *произведена круговая замѣна буквъ:* ω *на* ω'', ω' *на* ω *и* ω'' *на* ω'.

Необходимо имѣть въ виду, что понятіе о смежныхъ системахъ установлено нами такимъ образомъ, что двѣ системы совокупности (S) не могутъ быть смежными взаимно. Если, напримѣръ, $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ первая система смежная съ системой $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$, то система $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ не можетъ быть ни первой, ни второй, ни третьей системой смежной съ $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$.

Замѣчаніе. *Если* $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ *есть первая система смежная съ системой* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$, *а* $(\omega, \omega', \omega'')$ *какая нибудь другая система значеній коваріантныхъ формъ* (1), *то при существованіи неравенствъ*

$$|\omega'| < |\omega'_0| \quad \text{и} \quad |\omega''| < |\omega''_0|$$

должно существовать неравенство

$$|\omega| > |\omega_1|.$$

Поэтому при существованіи, напримѣръ, неравенствѣ

$$|\omega''| < |\omega''_0| \quad и \quad |\omega| < |\omega_1|$$

необходимо

$$|\omega'| > |\omega'_0|.$$

Послѣдовательные относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 44.

Пусть $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ какая нибудь система, принадлежащая къ совокупности (S). Найдемъ первую систему смежную съ $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$. Пусть эта система $(\omega_{11}, \omega'_{11}, \omega''_{11})$. Найдемъ первую смежную съ ней систему $(\omega_{21}, \omega'_{21}, \omega''_{21})$ и т. д. Получимъ безконечный рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0), \quad (\omega_{11}, \omega'_{11}, \omega''_{11}), \quad (\omega_{21}, \omega'_{21}, \omega''_{21}), \ldots \qquad (I)$$

элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} |\omega_0| < |\omega_{11}| < |\omega_{21}| < \cdots \\ |\omega'_0| > |\omega'_{11}| > |\omega'_{21}| > \cdots \\ |\omega''_0| > |\omega''_{11}| > |\omega''_{21}| > \cdots \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Найдемъ вторую систему смежную съ системой $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$. Пусть эта система $(\omega_{12}, \omega'_{12}, \omega''_{12})$. Вторую систему смежную съ $(\omega_{12}, \omega'_{12}, \omega''_{12})$ обозначимъ черезъ $(\omega_{22}, \omega'_{22}, \omega''_{22})$ и т. д. Получимъ безконечный рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0), \quad (\omega_{12}, \omega'_{12}, \omega''_{12}), \quad (\omega_{22}, \omega'_{22}, \omega''_{22}), \ldots \qquad (II)$$

элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} |\omega_0| > |\omega_{12}| > |\omega_{22}| > \cdots \\ |\omega'_0| < |\omega'_{12}| < |\omega'_{22}| < \cdots \\ |\omega''_0| > |\omega''_{12}| > |\omega''_{22}| > \cdots \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Подобнымъ же образомъ составимъ рядъ системъ

$$(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0), \quad (\omega_{13}, \omega'_{13}, \omega''_{13}), \quad (\omega_{23}, \omega'_{23}, \omega''_{23}), \ldots \qquad (III)$$

элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} |\omega_0| > |\omega_{13}| > |\omega_{23}| > \cdots \\ |\omega'_0| > |\omega'_{13}| > |\omega'_{23}| > \cdots \\ |\omega''_0| < |\omega''_{13}| < |\omega''_{23}| < \cdots \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Здѣсь $(\omega_{13}, \omega'_{13}, \omega''_{13})$ есть третья система смежная съ $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ и т. д. Ряды (I), (II) и (III) мы называемъ рядами послѣдовательныхъ относительныхъ minima системы коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \lambda\,, \mu\,, \nu \\ \lambda', \mu', \nu' \\ \lambda'', \mu'', \nu'' \end{bmatrix}. \tag{4}$$

§ 45.

Возникаетъ вопросъ, заключаются ли въ рядахъ (I), (II) и (III) всѣ относительные minima системы коваріантныхъ формъ (4). Въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты разсматриваемыхъ формъ ограничены только условіями, поставленными въ § 40, отвѣтить на этотъ вопросъ мы не можемъ. Прибавляя же къ условіямъ § 40 слѣдующій постулатъ *): *„существуетъ такое положительное не равное нулю число M, что неравенство*

$$|t\lambda+t'\mu+t''\nu|\,.\,|t\lambda'+t'\mu'+t''\nu'|\,.\,|t\lambda''+t'\mu''+t''\nu''| < M$$

не можетъ имѣть мѣста ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ t, t' и t''“ — не трудно доказать, что въ рядахъ (I), (II) и (III) заключаются не всѣ относительные minima системы коваріантныхъ формъ (4).

Это предложеніе является лишь частнымъ случаемъ болѣе общаго предложенія:

Къ совокупности (S) принадлежитъ безчисленное множество системъ $(\omega, \omega', \omega'')$, элементы которыхъ ω' и ω'' по численной величинѣ не меньше данныхъ чиселъ ε' и ε''.

Намъ не удалось найти доказательства этихъ предложеній, которое не было бы основано на вышеупомянутомъ постулатѣ, но для дальнѣйшихъ нашихъ изслѣдованій эти предложенія не имѣютъ существеннаго значенія.

§ 46.

Теорема. *Предположимъ, что $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ и $(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0)$ системы, представляющія относительные minima коваріантныхъ формъ (4).*

Если этимъ системамъ соотвѣтствуютъ ряды послѣдовательныхъ относительныхъ minima:

---

*) Cp. Kronecker: „Sur les unités complexes" (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, T. 96, p. 97).

$$(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0''),\quad (\omega_{11},\ \omega_{11}',\ \omega_{11}''),\quad (\omega_{21},\ \omega_{21}',\ \omega_{21}''),\ \ldots \qquad \text{(I)}$$

$$(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0''),\quad (\omega_{12},\ \omega_{12}',\ \omega_{12}''),\quad (\omega_{22},\ \omega_{22}',\ \omega_{22}''),\ \ldots \qquad \text{(II)}$$

$$(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0''),\quad (\omega_{13},\ \omega_{13}',\ \omega_{13}''),\quad (\omega_{23},\ \omega_{23}',\ \omega_{23}''),\ \ldots \qquad \text{(III)}$$

и

$$(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0''),\quad (\tau_{11},\ \tau_{11}',\ \tau_{11}''),\quad (\tau_{21},\ \tau_{21}',\ \tau_{21}''),\ \ldots \qquad \text{(I}'\text{)}$$

$$(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0''),\quad (\tau_{12},\ \tau_{12}',\ \tau_{12}''),\quad (\tau_{22},\ \tau_{22}',\ \tau_{22}''),\ \ldots \qquad \text{(II}'\text{)}$$

$$(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0''),\quad (\tau_{13},\ \tau_{13}',\ \tau_{13}''),\quad (\tau_{23},\ \tau_{23}',\ \tau_{23}''),\ \ldots \qquad \text{(III}'\text{)}$$

то въ одномъ изъ рядовъ (I), (II) *и* (III) *находится система, принадлежащая къ одному изъ рядовъ* (I′), (II′) *и* (III′).

Мы предполагаемъ, что $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$ и $(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0'')$ различныя системы, и потому ни одно изъ равенствъ

$$|\omega_0| = |\tau_0|,\quad \text{или}\quad |\omega_0'| = |\tau_0'|,\quad \text{или}\quad |\omega_0''| = |\tau_0''|,$$

на основаніи § 40, невозможно. Такъ какъ $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$ и $(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0'')$ системы, представляющія относительные minima коваріантныхъ формъ (4), то всѣ элементы системы $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$ по численной величинѣ не могутъ быть меньше или больше соотвѣтствующихъ элементовъ системы $(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0'')$. Мы можемъ предполагать, что два элемента системы $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$ меньше соотвѣтствующихъ элементовъ системы $(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0'')$. Въ томъ случаѣ, когда это условіе не выполнено, систему $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$ замѣняемъ системой $(\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_0'')$.

Возможны, слѣдовательно, только три случая:

1) $|\omega_0| > |\tau_0|,\quad |\omega_0'| < |\tau_0'|\quad$ и $\quad|\omega_0''| < |\tau_0''|$;

2) $|\omega_0| < |\tau_0|,\quad |\omega_0'| > |\tau_0'|\quad$ и $\quad|\omega_0''| < |\tau_0''|$;

3) $|\omega_0| < |\tau_0|,\quad |\omega_0'| < |\tau_0'|\quad$ и $\quad|\omega_0''| > |\tau_0''|$.

Мы докажемъ, что въ первомъ случаѣ одинъ изъ рядовъ (II) и (III) заключаетъ въ себѣ систему, которая принадлежитъ къ ряду (I′). Во второмъ случаѣ одинъ изъ рядовъ (III) и (I) заключаетъ систему, которая принадлежитъ къ ряду (II′). Въ третьемъ случаѣ одинъ изъ рядовъ (I) и (II) заключаетъ систему, которая принадлежитъ къ ряду (III′).

Мы разсматриваемъ подробно только первый случай, такъ какъ всѣ остальные случаи приводятся къ первому.

Мы предполагаемъ, что существуютъ неравенства

$$|\omega_0'| < |\tau_0'| \quad \text{и} \quad |\omega_0''| < |\tau_0''|. \qquad (5)$$

Найдемъ въ ряду (II) всѣ системы $(\omega_{i2},\ \omega_{i2}',\ \omega_{i2}'')$, элементы которыхъ удовлетворяютъ условію

$$|\omega_{i2}'| < |\tau_0'|. \qquad (6)$$

На основаніи неравенствъ (2) § 44 и леммы I-й § 42 убѣждаемся въ томъ, что число i можетъ имѣть только конечныя значенія.

Предположимъ, что всѣ эти значенія i находятся въ ряду

$$i = 0, 1, 2, \dots m. \tag{7}$$

Для бóльшаго удобства мы будемъ обозначать систему $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ еще иначе: $(\omega_{01}, \omega'_{01}, \omega''_{01})$, $(\omega_{02}, \omega'_{02}, \omega''_{02})$ и $(\omega_{03}, \omega'_{03}, \omega''_{03})$.

Найдемъ въ ряду (III) всѣ системы $(\omega_{j3}, \omega'_{j3}, \omega''_{j3})$, элементы которыхъ удовлетворяютъ условію

$$|\omega''_{j3}| < |\tau''_0|. \tag{8}$$

Число такихъ системъ конечно. Мы предполагаемъ, что всѣ значенія числа j заключаются въ ряду

$$j = 0, 1, 2, \dots n. \tag{9}$$

Элементы системъ ряда (I′) удовлетворяютъ неравенствамъ (1), т. е.

$$\left.\begin{array}{l} |\tau_0| < |\tau_{11}| < |\tau_{21}| < \cdots \\ |\tau'_0| > |\tau'_{11}| > |\tau'_{21}| > \cdots \\ |\tau''_0| > |\tau''_{11}| > |\tau''_{21}| > \cdots \end{array}\right\}, \tag{10}$$

и потому на основаніи леммы V-й § 42 убѣждаемся, что неравенства

$$|\tau'_{k1}| > |\omega'_0| \quad \text{и} \quad |\tau''_{k1}| > |\omega''_0| \tag{11}$$

возможны только при конечныхъ значеніяхъ числа k. На основаніи неравенствъ (5) убѣждаемся, что неравенства (11) удовлетворяются при $k=0$. Предположимъ, что k есть наибольшее число, при которомъ неравенства (11) возможны. Если окажется затѣмъ, что

$$|\tau'_{k+1,1}| = |\omega'_0|, \tag{12}$$

то системы $(\tau_{k+1,1}, \tau'_{k+1,1}, \tau''_{k+1,1})$ и $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ тождественны, и теорема доказана. Предположимъ, что равенство (12) не имѣетъ мѣста. Такъ какъ k есть наибольшее число, удовлетворяющее неравенствамъ (11), то необходимо:

$$\text{или} \quad |\tau'_{k+1,1}| < |\omega'_0|, \quad \text{или} \quad |\tau''_{k+1,1}| < |\omega''_0|.$$

Мы докажемъ, что при существованіи неравенства

$$|\tau'_{k+1,1}| < |\omega'_0|$$

въ ряду (III) находится система, которая принадлежитъ къ ряду (I′), а при существованіи неравенства

$$|\tau''_{k+1,1}| < |\omega''_0|$$

въ ряду (II) находится система, которая принадлежитъ къ ряду (I′).

Предположимъ, что

$$|\tau'_{k+1,1}| < |\omega'_0|. \qquad (13)$$

По условію (11) неравенства

$$|\tau'_{h1}| > |\omega'_{s3}| \quad \text{и} \quad |\tau''_{h1}| > |\omega''_{s3}| \qquad (14)$$

существуютъ при $h=k$ и $s=0$. Можетъ случиться, что можно найти нѣсколько цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ h и s, удовлетворяющихъ этимъ неравенствамъ. Изъ такихъ паръ чиселъ h и s выберемъ ту пару, въ которой число h имѣетъ наибольшее значеніе. Такое число h всегда можно найти, такъ какъ на основаніи предыдущаго число s, удовлетворяющее неравенствамъ (14), можетъ быть равно только одному изъ чиселъ (9). Слѣдовательно, если существуютъ неравенства (14), то, на основаніи (3), существуютъ также неравенства:

$$|\tau'_{h1}| > |\omega'_{n3}| \quad \text{и} \quad |\tau''_{h1}| > |\omega''_{03}|. \qquad (15)$$

На основаніи неравенствъ (10) и леммы V-й § 42 убѣждаемся, что неравенства (15) могутъ существовать только при конечныхъ значеніяхъ числа h. Изъ этихъ значеній числа h выберемъ наибольшее число, удовлетворяющее неравенствамъ (14) при одномъ изъ значеній s равномъ $0, 1, 2, \ldots n$. Мы можемъ также предполагать, что при этомъ наибольшемъ значеніи h число s, удовлетворяющее неравенствамъ (14), имѣетъ наибольшее значеніе.

При такихъ предположеніяхъ относительно чиселъ h и s на основаніи неравенствъ (3) и (14) находимъ

$$|\tau'_{h1}| > |\omega'_{s+1,3}| \quad \text{и} \quad |\tau''_{h1}| < |\omega''_{s+1,3}|$$

и на основаніи (10)

$$|\tau''_{h+1,1}| < |\omega''_{s+1,3}|. \qquad (16)$$

Если бы оказалось, что системы $(\tau_{h+1,1}, \tau'_{h+1,1}, \tau''_{h+1,1})$ и $(\omega_{s3}, \omega'_{s3}, \omega''_{s3})$ тождественныя, то теорема доказана. Предполагая, что эти системы различныя, на основаніи неравенствъ (14) и замѣчанія къ § 43, находимъ

$$|\tau_{h+1,1}| < |\omega_{s3}|, \qquad (17)$$

и потому на основаніи (16)

$$|\tau'_{h+1,1}| > |\omega'_{s3}|. \qquad (18)$$

Мы предполагаемъ, что $h \geq k$, и потому на основаніи неравенствъ (13) и (10) получаемъ

$$|\tau'_{h+1,1}| < |\omega'_{03}|. \qquad (19)$$

Приходимъ къ заключенію, что число s не равно нулю, иначе не-

равенство (18) было бы невозможно. Между числами 0, 1, 2, ... $(s-1)$ можемъ выбрать число j, удовлетворяющее условію

$$|\omega'_{j+1,3}| \leq |\tau'_{h+1,1}| < |\omega'_{j3}|. \qquad (20)$$

На основаніи неравенствъ (17), (3) и (20) находимъ

$$|\tau_{h+1,1}| < |\omega_{j3}| \quad \text{и} \quad |\tau'_{h+1,1}| < |\omega'_{j3}|.$$

Слѣдовательно, если системы $(\tau_{h+1,1}, \tau'_{h+1,1}, \tau''_{h+1,1})$ и $(\omega_{j+1,3}, \omega'_{j+1,3}, \omega''_{j+1,3})$ не тождественныя, то будетъ существовать неравенство

$$|\tau''_{h+1,1}| > |\omega''_{j+1,3}|. \qquad (21)$$

На основаніи неравенствъ (20) и (21) находимъ

$$|\tau'_{h+1,1}| > |\omega'_{j+1,3}| \quad \text{и} \quad |\tau''_{h+1,1}| > |\omega''_{j+1,3}|.$$

Эти неравенства противорѣчатъ предположенію, что h есть наибольшее число, удовлетворяющее неравенствамъ (14), и потому системы $(\tau_{h+1,1}, \tau'_{h+1,1}, \tau''_{h+1,1})$ и $(\omega_{j+1,1}, \omega'_{j+1,1}, \omega''_{j+1,1})$ тождественныя.

Подобнымъ же образомъ убѣждаемся въ томъ, что при существованіи неравенства

$$|\tau''_{i+1,1}| < |\omega''_0|$$

въ ряду (II) находится система, принадлежащая къ ряду (I').

О значеніяхъ перемѣнныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ относительные minima системы коваріантныхъ формъ.

§ 47.

Основная теорема. *Если системы* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$ *и* $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ*

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad \text{и} \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu''$$

при значеніяхъ перемѣнныхъ

$$X = p_0,\ X' = p'_0,\ X'' = p''_0 \quad \text{и} \quad X = p_1,\ X' = p'_1,\ X'' = p''_1$$

и система $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ *смежна съ системой* $(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0)$, *то числа*

$$p'_0 p''_1 - p''_0 p'_1, \quad p''_0 p_1 - p_0 p''_1 \quad \text{и} \quad p_0 p'_1 - p'_0 p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя.

Эта теорема можетъ быть доказана такъ же, какъ была доказана соотвѣтствующая теорема § 21 отдѣла II.

Приведенныя системы коваріантныхъ формъ.

§ 48.

Опредѣленіе. *Систему коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} \lambda, \mu, \nu \\ \lambda', \mu', \nu' \\ \lambda'', \mu'', \nu'' \end{bmatrix} \qquad (1)$$

называемъ приведенной системой 1-го рода, если $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ *и* (μ, μ', μ'') *относительные minima значеній коваріантныхъ формъ* (1) *и при томъ* (μ, μ', μ'') *есть первая система смежная съ* $(\lambda, \lambda', \lambda'')$.

Систему формъ (1) *называемъ приведенной системой 2-го рода, если* (μ, μ', μ'') *есть вторая система смежная съ* $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, *и приведенной системой 3-го рода, если* (μ, μ', μ'') *третья система смежная съ* $(\lambda, \lambda', \lambda'')$.

Предположимъ, что $(\omega_0, \omega_0', \omega_0'')$ какая нибудь система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (1), и $(\omega_1, \omega_1', \omega_1'')$ первая система смежная съ $(\omega_0, \omega_0', \omega_0'')$. Полагаемъ

$$\omega_0 = p_0\lambda + p_0'\mu + p_0''\nu, \quad \omega_1 = p_1\lambda + p_1'\mu + p_1''\nu \text{ и т. д.}$$

Мы доказали (§ 47), что числа

$$p_0'p_1'' - p_0''p_1', \quad p_0''p_1 - p_0p_1'' \quad \text{и} \quad p_0p_1' - p_0'p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя. Можно, слѣдовательно, найти цѣлыя раціональныя числа q_0, q_0', q_0'', удовлетворяющія равенству

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 & q_0 \\ p_0' & p_1' & q_0' \\ p_0'' & p_1'' & q_0'' \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad (2)$$

Система формъ (1) подстановкой (2) преобразуется въ эквивалентную ей приведенную систему 1-го рода

$$\begin{bmatrix} \omega_0, \omega_1, \nu_0 \\ \omega_0', \omega_1', \nu_0' \\ \omega_0'', \omega_1'', \nu_0'' \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Если систему (3) преобразовать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix},$$

то, какія бы значенія ни имѣли цѣлыя числа ε и δ, полученная система будетъ приведенной системой 1-го рода.

Приведемъ систему (3) къ нормальному виду; получимъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & \varphi_1', & \psi_1' \\ 1, & \varphi_1'', & \psi_1'' \end{bmatrix}, \tag{4}$$

коэффиціенты которой опредѣляются равенствами

$$\varphi_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad \psi_1 = \frac{\nu_1}{\omega_0} \text{ и т. д.}$$

Система (4) приведенная система 1-го рода, и потому коэффиціенты ея удовлетворяютъ условіямъ:

$$|\varphi_1| > 1, \quad |\varphi_1'| < 1 \quad \text{и} \quad |\varphi_1''| < 1. \tag{5}$$

Если система (4) приведенная система 2-го рода, то коэффиціенты ея удовлетворяютъ неравенствамъ (5), когда въ этихъ неравенствахъ произведена замѣна буквъ: φ_1 на φ_1', φ_1' на φ_1'' и φ_1'' на φ_1.

Такимъ же образомъ получаются условія для коэффиціентовъ приведенной системы 3-го рода.

Вспомогательное преобразованіе системы коваріантныхъ формъ.

§ 49.

Лемма. *Каждая система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix} \tag{1}$$

можетъ быть преобразована подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & \varphi_1', & \psi_1' \\ 1, & \varphi_1'', & \psi_1'' \end{bmatrix},$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ слѣдующимъ 3-мъ условіямъ:

1) *Числа $\varphi'-\varphi''$ и $\psi'-\psi''$ различныхъ знаковъ, если только $\varphi'-\varphi''$ не равно нулю; при этомъ или $|\varphi'-\varphi''| \leq 1$ и $|\psi'-\psi''| > 1$, или $|\varphi'-\varphi''| < |\psi'-\psi''| \leq 1$, но тогда $\psi''-\psi=0$. Числа $\varphi''-\varphi$ и $\psi''-\psi$ одного знака, при чемъ $|\varphi''-\varphi| > |\psi''-\psi|$.*

2) $\varphi > 0$, $|\varphi'| < 1$, $|\varphi''| < 1$ *и ни при какомъ цѣломъ раціональномъ значеніи* t *неравенства* $|t+\varphi| < \varphi$, $|t+\varphi'| < 1$ *и* $|t+\varphi''| < 1$ *не возможны одновременно.*

3) $|\psi'| < 1$ *и, если возможно, то* $|\psi''| < 1$. *Въ томъ случаѣ, когда неравенство* $|\psi''| < 1$ *не возможно, числа* ψ' *и* ψ'' *должны быть разныхъ знаковъ. Когда* $|\psi'| < 1$ *и* $|\psi''| < 1$, *неравенства* $|t+\psi| < |\psi|$, $|t+\psi'| < 1$ *и* $|t+\psi''| < 1$ *не возможны одновременно.*

Найдемъ подстановку

$$\begin{vmatrix} \beta' & \gamma' \\ \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая преобразуетъ бинарную систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} \varphi'-\varphi'', & \psi'-\psi'' \\ \varphi''-\varphi, & \psi''-\psi \end{bmatrix}$$

въ приведенную систему 2-го рода

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix},$$

опредѣляемую условіями:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \text{ и } \mu \text{ различныхъ знаковъ, если } \lambda \text{ не равно нулю; при этомъ} \\ \text{или } |\lambda| \leq 1 \text{ и } |\mu| > 1, \text{ или } |\lambda| < |\mu| \leq 1, \text{ но тогда } \mu' = 0; \\ \qquad \lambda' \text{ и } \mu' \text{ одного знака, при чемъ } |\lambda'| > |\mu'|. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Здѣсь

$$\lambda = \beta'(\varphi'-\varphi'') + \beta''(\psi'-\psi''), \quad \mu = \gamma'(\varphi'-\varphi'') + \gamma''(\psi'-\psi'') \text{ и т. д.} \quad (3)$$

Данную систему коваріантныхъ формъ (1) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1; \quad (4)$$

числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$|\beta+\beta'\varphi'+\beta''\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\gamma+\gamma'\varphi'+\gamma''\psi'| < 1.$$

Для β и γ получимъ по два значенія. Одно изъ значеній β будетъ также удовлетворять неравенству

$$|\beta+\beta'\varphi''+\beta''\psi''| < 1,$$

такъ какъ на основаніи (2) и (3)

$$|(\beta+\beta'\varphi'+\beta''\psi')-(\beta+\beta'\varphi''+\beta''\psi'')| \leq 1.$$

Если неравенства

$$|\beta+\beta'\varphi'+\beta''\psi'|<1 \quad \text{и} \quad |\beta+\beta'\varphi''+\beta''\psi''|<1 \tag{5}$$

возможны только при одномъ значеніи β, то этими неравенствами число β вполнѣ опредѣляется. Если же два значепія β удовлетворяютъ неравенствамъ (5), то изъ этихъ двухъ значеній β выберемъ то, при которомъ численное значеніе $\beta+\beta'\varphi+\beta''\psi$ наименьшее.

Для числа γ мы получили также два значенія; изъ нихъ выберемъ то, при которомъ существуетъ неравенство

$$|\gamma+\gamma'\varphi''+\gamma''\psi''|<1.$$

Если это неравенство не возможно ни при одномъ изъ двухъ значеній γ, то изъ нихъ выберемъ то, при которомъ численное значеніе $\gamma+\gamma'\varphi''+\gamma''\psi''$ наименьшее. Если неравенства

$$|\gamma+\gamma'\varphi'+\gamma''\psi'|<1 \quad \text{и} \quad |\gamma+\gamma'\varphi''+\gamma''\psi''|<1 \tag{6}$$

возможны при одномъ только значеніи γ, то этими неравенствами число γ вполнѣ опредѣляется.

Если неравенства (6) возможны при двухъ значеніяхъ γ, то изъ нихъ выберемъ то, при которомъ численное значеніе $\gamma+\gamma'\varphi+\gamma''\psi$ наименьшее.

Коэффиціенты подстановки (4) такимъ образомъ вполнѣ опредѣляются. Если окажется, что $\beta+\beta'\varphi+\beta''\psi$ положительное число, то преобразованіе кончено, и подстановка (4) искомая.

Если $\beta+\beta'\varphi+\beta''\psi<0$, то подстановка

$$\begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\gamma \\ 0 & -\beta' & -\gamma' \\ 0 & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

преобразуетъ систему (1) въ систему, удовлетворяющую всѣмъ условіямъ леммы.

Изложенное преобразованіе системы (1) назовемъ вспомогательнымъ преобразованіемъ 1-го рода. Данную систему (1) можно преобразовать еще слѣдующимъ образомъ: замѣнивъ коэффиціенты системы φ на φ', ψ на ψ' и т. д., полученную систему можно привести къ виду, удовлетворяющему условіямъ леммы. Такое преобразованіе системы (1) назовемъ преобразованіемъ 2-го рода. Преобразованіе 3-го рода характеризуется круговой замѣной буквъ: φ на φ'', ψ на ψ'' и т. д.

Алгориемъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована въ приведенную систему подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно.

§ 50.

Въ дальнѣйшемъ мы говоримъ исключительно о преобразованіи данной системы коваріантныхъ формъ въ приведенную систему 1-го рода.

Для того, чтобы данную систему преобразовать, напримѣръ, въ приведенную систему 2-го рода, нужно произвести круговую замѣну коэффиціентовъ системы: φ на φ', ψ на ψ' и т. д. и затѣмъ полученную систему преобразовать въ приведенную систему 1-го рода. Если въ этой системѣ произвести обратную замѣну коэффиціентовъ, то получится приведенная система 2-го рода.

Предположимъ, что данная система коваріантныхъ формъ преобразована подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi\,, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix}, \tag{1}$$

удовлетворяющую условіямъ леммы § 49.

Требуется систему (1) преобразовать подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{2}$$

или въ приведенную систему 1-го рода, или обнаружить невозможность такого преобразованія.

Если подстановка (2) преобразуетъ систему (1) въ приведенную систему 1-го рода, то (1, 1, 1) есть система, представляющая относительные minima коваріантныхъ формъ (1). Обозначимъ

$$\omega = p + p'\varphi + p''\psi, \quad \omega' = p + p'\varphi' + p''\psi' \quad \text{и} \quad \omega'' = p + p'\varphi'' + p''\psi''.$$

Система $(\omega, \omega', \omega'')$ есть первая система смежная съ системой (1, 1, 1).

Система (1) не можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида (2), если только существуетъ, хотя бы одна, система $(\omega_1, \omega'_1, \omega''_1)$ значеній коваріантныхъ формъ (1), элементы которой удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\omega_1| < 1, \quad |\omega'_1| < 1 \quad \text{и} \quad |\omega''_1| < 1. \qquad (3)$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ называть систему $(\omega, \omega', \omega'')$ искомой, если эта система или первая система смежная съ системой (1, 1, 1), или элементы системы $(\omega, \omega', \omega'')$ удовлетворяютъ неравенствамъ (3).

Предположимъ, что t' и t'' нѣкоторыя цѣлыя раціональныя числа. Опредѣлимъ цѣлое число t изъ неравенства

$$|t+t'\varphi'+t''\psi'| < 1.$$

Этому неравенству удовлетворяютъ два значенія t; изъ нихъ выберемъ то, которое удовлетворяетъ неравенству

$$|t+t'\varphi''+t''\psi''| < 1.$$

Если оба значенія t удовлетворяютъ этому неравенству, то изъ двухъ значеній t выберемъ то, при которомъ численное значеніе $t+t'\varphi+t''\psi$ наименьшее. Изъ двухъ чиселъ $t+t'\varphi+t''\psi$ и $-t-t'\varphi-t''\psi$ выберемъ положительное число. Пусть это число τ, а соотвѣтствующія значенія коваріантныхъ формъ (1): τ' и τ''. Для краткости будемъ говорить, что комбинаціи (t', t'') значеній перемѣнныхъ X' и X'' соотвѣтствуетъ система (τ, τ', τ''). Въ томъ случаѣ, когда неравенства

$$|t+t'\varphi'+t''\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |t+t'\varphi''+t''\psi''| < 1$$

не могутъ существовать одновременно ни при какихъ значеніяхъ t, комбинацію (t', t'') будемъ называть невозможной.

§ 51.

Теорема I. *Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ* (1) *удовлетворяетъ условіямъ леммы* § 49 *и кромѣ того условію:* $\psi > 0$. *Если среди системъ*

$$(\omega_0, \omega'_0, \omega''_0), \quad (\omega_1, \omega'_1, \omega''_1), \quad (\omega_2, \omega'_2, \omega''_2) \quad \text{и} \quad (\omega_3, \omega'_3, \omega''_3) \qquad (4)$$

значеній этихъ формъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, -1) \quad \text{и} \quad (2, -1) \qquad (5)$$

значеній перемѣнныхъ X' и X'', нѣтъ ни одной системы, всѣ элементы которой были бы по численной величинѣ меньше единицы, то система (1, 1, 1) *представляетъ относительные minima коваріант-*

ныхъ формъ (1), *и среди системъ* (4) *находится первая система смежная съ системой* (1, 1, 1).

Предположимъ, что среди системъ (4) нѣтъ ни одной системы, всѣ элементы которой по численной величинѣ были бы меньше единицы. Обозначимъ черезъ

$$\omega = p+p'\varphi+p''\psi, \quad \omega' = p+p'\varphi'+p''\psi' \quad \text{и} \quad \omega'' = p+p'\varphi''+p''\psi'' \tag{6}$$

систему $(\omega, \omega', \omega'')$, всѣ элементы которой по численной величинѣ меньше единицы въ томъ случаѣ, когда система (1, 1, 1) не представляетъ относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (1), въ противномъ же случаѣ пусть $(\omega, \omega', \omega'')$ есть первая система смежная съ системой (1, 1, 1). На основаніи этого условія получаемъ неравенства

$$|p+p'\varphi'+p''\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |p+p'\varphi''+p''\psi''| < 1. \tag{7}$$

Мы не дѣлаемъ никакого предположенія относительно знака числа ω.

Если система $(\omega, \omega', \omega'')$ заключается между системами (4), теорема доказана. Допустимъ противное и предположимъ, что одно изъ чиселъ p' и p'' равно нулю. Если, напримѣръ, $p' = 0$, то можемъ предполагать, что $p'' > 0$. Неравенства (7) обращаются въ слѣдующія:

$$|p+p''\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |p+p''\psi''| < 1, \tag{8}$$

и потому необходимо

$$|\psi''| < 1,$$

такъ какъ по 3-му условію леммы § 49 $|\psi'| < 1$ и, если $|\psi''| > 1$, то ψ' и ψ'' различныхъ знаковъ; въ этомъ случаѣ неравенства (8) очевидно невозможны. Поэтому предполагаемъ, что $|\psi''| < 1$.

Такъ какъ $|\psi'| < 1$, $|\psi''| < 1$ и $\psi > 0$, то система (ψ, ψ', ψ'') соотвѣтствуетъ комбинаціи (0, 1), и согласно условію

$$\psi > 1 \quad \text{и} \quad \omega < \psi.$$

На основаніи равенствъ (6) получаемъ

$$p + p''\psi < \psi,$$

и потому p число отрицательное. Но при условіяхъ: $p < 0$ и $p'' > 0$ неравенства (8) могутъ быть возможны только тогда, когда

$$\psi' > 0 \quad \text{и} \quad \psi'' > 0.$$

На основаніи этихъ неравенствъ и неравенства $\psi > 1$, находимъ

$$0 < \psi - 1 < \psi, \quad |\psi'-1| < 1 \quad \text{и} \quad |\psi''-1| < 1.$$

Эти неравенства противорѣчатъ 3-му условію леммы § 49.

Такъ же докажемъ, что p'' не можетъ быть равно нулю.

Предположимъ, что ни p', ни p'' не равно нулю.

Допустимъ, что p' и p'' одного знака. Мы можемъ предполагать, что

$$p' \geqq 1 \quad \text{и} \quad p'' \geqq 1. \tag{9}$$

I-й случай: $\psi > 1$.

На основаніи 2-го условія леммы § 49 имѣемъ

$$\varphi > 0, \quad |\varphi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\varphi''| < 1. \tag{10}$$

Кромѣ того, система $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ соотвѣтствуетъ комбинаціи (1, 0), и потому

$$\varphi > 1. \tag{11}$$

По условію существуетъ неравенство

$$\omega < \varphi$$

или на основаніи (6)

$$p + p'\varphi + p''\psi < \varphi; \tag{12}$$

слѣдовательно на основаніи (9) и (11)

$$p \leqq -p' - p''. \tag{13}$$

По условію $\psi > 0$, и потому одно изъ чиселъ ψ' и ψ'' отрицательно. Если $\psi' < 0$, то неравенство

$$|p + p'\varphi' + p''\psi'| < 1,$$

на основаніи (9), (10) и (13), очевидно невозможно. Если $\psi'' < 0$, то неравенство

$$|p + p'\varphi'' + p''\psi''| < 1$$

невозможно.

II-й случай: $\psi < 1$.

На основаніи неравенствъ

$$0 < \psi < 1 \quad \text{и} \quad |\psi'| < 1$$

находимъ

$$|\psi''| > 1,$$

иначе всѣ элементы системы, соотвѣтствующей комбинаціи (0, 1), были бы меньше единицы, что противорѣчитъ предположенію.

На основаніи 1-го условія леммы § 49, $\varphi - \varphi''$ и $\psi - \psi''$ одного знака.

Такъ какъ на основаніи (10) и (11) $\varphi - \varphi'' > 0$, то

$$\psi-\psi'' \geq 0;$$

слѣдовательно

$$\psi'' < -1.$$

На основаніи неравенства (12) и условія $\psi > 0$ находимъ

$$p \leq -p'.$$

При существованіи неравенствъ

$$p \leq -p', \quad |\varphi''| < 1 \quad \text{и} \quad \psi'' < -1$$

неравенства (7) невозможны.

Остается единственное возможное предположеніе, что p' и p'' различныхъ знаковъ. Для бо́льшей опредѣленности полагаемъ

$$p' > 0 \quad \text{и} \quad p'' < 0.$$

На основаніи неравенствъ (7) получаемъ

$$|p'(\varphi'-\varphi'')+p''(\psi'-\psi'')| < 2. \tag{14}$$

На основаніи 1-го условія леммы § 49, $\varphi'-\varphi''$ и $\psi'-\psi''$ различныхъ знаковъ, если $\varphi'-\varphi''$ не равно нулю, при чемъ

$$|\varphi'-\varphi''| \leq 1 \quad \text{и} \quad |\psi'-\psi''| > 1, \tag{15}$$

такъ какъ, если $|\psi'-\psi''| \leq 1$, то по условію $\psi''-\psi=0$, и на основаніи 3-го условія леммы § 49 найдемъ $0<\psi<1$, $|\psi'|<1$ и $0<\psi''<1$, что противорѣчитъ предположенію.

Слѣдовательно, неравенство (14) возможно только при условіи:

$$p'' = -1.$$

Для того, чтобы доказать предложенную теорему, остается только показать, что p' не можетъ быть больше 2. Предполагаемъ, что $p' \geq 3$ и $p''=-1$. На основаніи равенствъ (6) находимъ

$$\omega-\omega'' = p'(\varphi-\varphi'')-(\psi-\psi''). \tag{16}$$

И такъ какъ на основаніи 1-го условія леммы § 49

$$\varphi-\varphi'' > \psi-\psi'',$$

то изъ равенства (16) выводимъ

$$\omega-\omega'' > 2(\varphi-\varphi'')$$

или

$$\omega''-2\varphi'' < \omega-2\varphi.$$

Такъ какъ $\omega < \varphi$, то

$$\omega''-2\varphi'' < -\varphi. \tag{17}$$

По условію $|\omega''| < 1$ и $\varphi > 1$, и потому необходимо $\varphi'' > 0$. Но, если $\varphi > 0$ и $\varphi'' > 0$, то $\varphi' < 0$. Число ψ'' не можетъ быть положительнымъ, такъ какъ, если $\psi > 0$ и $\psi'' > 0$, то $\psi' < 0$, и числа $\varphi' - \varphi''$ и $\psi' - \psi''$ были бы одного знака, что противорѣчитъ предположенію. Итакъ

$$\varphi'' > 0 \quad \text{и} \quad \psi'' < 0.$$

На основаніи неравенства (17) и равенствъ (6) получаемъ

$$p + (p'-2)\varphi'' - \psi'' < -\varphi,$$

слѣдовательно необходимо

$$p \leqq -2.$$

При существованіи неравенствъ $p \leqq -2$, $\varphi' < 0$ и $|\psi'| < 1$ первое изъ неравенствъ (7) очевидно невозможно.

Замѣчаніе. *Если коэффиціенты системы* (1) *удовлетворяютъ условіямъ теоремы I и кромѣ того условію:*

$$\varphi - \varphi' \geqq \psi - \psi',$$

то среди системъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ (1, 0), (0, 1) *и* (1, —1), *находится искомая система* $(\omega, \omega', \omega'')$.

Для того, чтобы убѣдиться въ справедливости этого замѣчанія, нужно только показать, что система, соотвѣтствующая комбинаціи (2, —1), не можетъ быть искомой.

Предположимъ, что $p' = 2$ и $p'' = -1$. На основаніи равенствъ

$$\omega - \omega' = 2(\varphi - \varphi') - (\psi - \psi'), \quad \omega - \omega'' = 2(\varphi - \varphi'') - (\psi - \psi'')$$

и условій

$$\varphi - \varphi' \geqq \psi - \psi', \quad \varphi - \varphi'' > \psi - \psi''$$

находимъ

$$\omega - \omega' \geqq \varphi - \varphi' \quad \text{и} \quad \omega - \omega'' > \varphi - \varphi''. \tag{18}$$

Изъ этихъ неравенствъ на основаніи неравенства $\omega < \varphi$ выводимъ

$$\omega' - \varphi' < 0 \quad \text{и} \quad \omega'' - \varphi'' < 0.$$

На основаніи неравенствъ (7) и (10) получаемъ

$$\omega' - \varphi' > -2 \quad \text{и} \quad \omega'' - \varphi'' > -2,$$

слѣдовательно

$$|1 + \omega' - \varphi'| < 1 \quad \text{и} \quad |1 + \omega'' - \varphi''| < 1. \tag{19}$$

Одно изъ чиселъ φ' и φ'' отрицательно, и потому на основаніи (18) и (7) находимъ

$$\omega > \varphi - 1$$

или

$$1 + \omega - \varphi > 0.$$

Съ другой стороны, очевидно

$$1+\omega-\varphi<1,$$

и вслѣдствіе неравенствъ (19) всѣ элементы системы, соотвѣтствующей комбинаціи (1, —1), по численной величинѣ будутъ меньше единицы, что противорѣчитъ предположенію.

Теорема II. *Если система коваріантныхъ формъ* (1) *удовлетворяетъ условіямъ леммы* § 49 *и число* ψ *отрицательное, то въ случаѣ, когда* $\varphi-\varphi'$ *и* $\psi-\psi'$ *одного знака, всѣ элементы одной изъ системъ* $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ *и* (ψ, ψ', ψ'') *по численной величинѣ меньше единицы.*

Допустимъ противное. Такъ какъ $|\varphi'|<1$ и $|\varphi''|<1$, то согласно предположенію $\varphi>1$. Слѣдовательно

$$\varphi-\varphi'>0 \quad \text{и} \quad \varphi-\varphi''>0.$$

На основаніи этихъ неравенствъ находимъ

$$\psi-\psi' \geqq 0 \quad \text{и} \quad \psi-\psi'' \geqq 0. \tag{20}$$

Но $\psi<0$, и потому $\psi'<0$ и $\psi''<0$. Такъ какъ ψ' и ψ'' одного знака, то согласно 3-му условію леммы § 49

$$|\psi'|<1 \quad \text{и} \quad |\psi''|<1.$$

Въ этомъ случаѣ необходимо $|\psi|>1$. Такъ какъ ψ отрицательно, то неравенства (20) очевидно невозможны.

Теорема III. *Предположимъ, что система коваріантныхъ формъ* (1) *удовлетворяетъ условіямъ леммы* § 49 *и кромѣ того условіямъ:* $\psi<0$, $\varphi-\varphi'$ и $\psi-\psi'$ *различныхъ знаковъ. Опредѣлимъ цѣлое положительное число* δ *такъ, чтобы число* $\delta(\varphi-\varphi')+\psi-\psi'$ *было одного знака съ* $\varphi-\varphi'$ *и существовало неравенство*

$$|\delta(\varphi-\varphi')+\psi-\psi'|<|\varphi-\varphi'|.$$

Если среди системъ значеній коваріантныхъ формъ (1), *соотвѣтствующихъ комбинаціямъ*

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (\delta, 1) \quad \text{и} \quad (\delta-1, 1), \tag{21}$$

нѣтъ ни одной системы, всѣ элементы которой были бы по численной величинѣ меньше единицы, то система (1, 1, 1) *представляетъ относительные тіпіта коваріантныхъ формъ* (1), *и среди перечисленныхъ системъ находится первая система смежная съ* (1, 1, 1). *Исключеніе представляетъ только случай, когда*

$$\delta=1 \quad \text{и} \quad |\delta(\varphi'-\varphi'')+\psi'-\psi''| \leqq 1. \tag{22}$$

Въ этомъ случаѣ комбинаціи (21) *должны быть замѣнены комбинаціями*

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 1) \quad и \quad (1, 2). \tag{21'}$$

Предположимъ, что мы нашли системы значеній коваріантныхъ формъ (1), соотвѣтствующія комбинаціямъ (21), и среди этихъ системъ не нашли ни одной системы, всѣ элементы которой были бы по численной величинѣ меньше единицы. Обозначимъ

$$\omega = p+p'\varphi+p''\psi, \quad \omega' = p+p'\varphi'+p''\psi' \quad и \quad \omega'' = p+p'\varphi''+p''\psi'', \tag{23}$$

и пусть система $(\omega, \omega', \omega'')$ искомая. Слѣдовательно

$$|p+p'\varphi'+p''\psi'| < 1 \quad и \quad |p+p'\varphi''+p''\psi''| < 1. \tag{24}$$

Мы предполагаемъ, что система $(\omega, \omega', \omega'')$ не заключается между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ (21), и между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ (21'), въ томъ случаѣ, когда выполнены условія (22).

Такъ какъ

$$|\varphi'| < 1, \quad |\varphi''| < 1 \quad и \quad \varphi > 1,$$

то $\varphi - \varphi' > 0$, $\varphi - \varphi'' > 0$, и согласно условію

$$\psi - \psi' < 0 \quad и \quad \psi - \psi'' \geq 0. \tag{25}$$

Мы предполагаемъ, что $\psi < 0$, слѣдовательно $\psi'' < 0$ и $\psi' > 0$.

Число φ' не можетъ быть положительнымъ, иначе $\varphi'' < 0$, и числа $\varphi' - \varphi''$ и $\psi' - \psi''$ были бы одного знака, что противорѣчитъ 1-му условію леммы § 49. Слѣдовательно

$$\varphi > 0, \quad \varphi' < 0, \quad \psi < 0, \quad \psi' > 0 \quad и \quad \psi'' < 0. \tag{26}$$

Не трудно убѣдиться въ томъ, что ни число p', ни число p'' не можетъ быть равно нулю и что p' и p'' не могутъ быть различныхъ знаковъ. Поэтому можно предполагать, что $p' \geq 1$ и $p'' \geq 1$.

Если $p'' = 1$, то необходимо $p' > \delta$, такъ какъ неравенства (24) не могутъ существовать одновременно, если только $0 \leq p' < \delta$. Въ этомъ убѣждаемся слѣдующимъ образомъ.

Ни при какомъ значеніи цѣлаго числа δ_1, удовлетворяющаго условію

$$0 \leq \delta_1 < \delta,$$

нельзя найти цѣлаго числа ε_1, которое удовлетворяло бы одновременно неравенствамъ

$$|\varepsilon_1+\delta_1\varphi'+\psi'| < 1 \quad и \quad |\varepsilon_1+\delta_1\varphi''+\psi''| < 1. \tag{24'}$$

Предположимъ, что δ_1 наибольшее число, при которомъ эти неравенства возможны. Если

$$|\varepsilon_1+\delta_1\varphi+\psi| > 1,$$

то на основанiи равенства

$$\varepsilon_1+\delta_1\varphi+\psi-\varepsilon_1-\delta_1\varphi''-\psi''=\delta_1(\varphi-\varphi'')+\psi-\psi''$$

и условiй: $\varphi-\varphi''>0$, $\psi-\psi''\geqq 0$ найдемъ

$$\varepsilon_1+\delta_1\varphi+\psi>1,$$

и потому

$$\delta_1(\varphi-\varphi')+\psi-\psi'>0.$$

Слѣдовательно $\delta_1\geqq\delta$, что противорѣчитъ предположенiю. Итакъ необходимо

$$|\varepsilon_1+\delta_1\varphi+\psi|<1.$$

Обозначимъ

$$\pi=\varepsilon_1+\delta_1\varphi+\psi,\quad \pi'=\varepsilon_1+\delta_1\varphi'+\psi' \quad \text{и} \quad \pi''=\varepsilon_1+\delta_1\varphi''+\psi''.$$

Поэтому

$$\pi-\pi''=\delta_1(\varphi-\varphi'')+\psi-\psi'' \quad \text{и} \quad \pi-\pi'=\delta_1(\varphi-\varphi')+\psi-\psi'.$$

Число δ_1 не можетъ быть равно $\delta-1$, такъ какъ по предположенiю комбинацiи $(\delta-1,\ 1)$ соотвѣтствуетъ система, элементы которой не всѣ по численной величинѣ меньше единицы. Слѣдовательно $\delta_1\leqq\delta-2$, и на основанiи предыдущихъ равенствъ найдемъ

$$\pi-\pi''>0 \quad \text{и} \quad \pi-\pi'<-1,$$

такъ какъ на основанiи неравенствъ (26) $\varphi-\varphi'>1$. Изъ этихъ неравенствъ и условiй $|\pi|<1$, $|\pi'|<1$ и $|\pi''|<1$ слѣдуетъ:

$$\pi<0,\quad \pi'>0 \quad \text{и} \quad \pi''<0.$$

Число φ'' не можетъ быть отрицательнымъ, такъ какъ иначе $\varphi-\varphi''>1$, и тогда

$$\pi-\pi''>1,$$

что невозможно. Итакъ $\varphi''>0$, и на основанiи (26) $\varphi'<0$. Слѣдовательно

$$|\pi'+\varphi'|<1 \quad \text{и} \quad |\pi''+\varphi''|<1,$$

т. е. неравенства (24′) возможны при значенiи δ_1 равномъ δ_1+1, что противорѣчитъ предположенiю.

Предполагая, что $p'>\delta$, на основанiи равенствъ (23) и условiй теоремы получимъ неравенства

$$\omega-\omega'>\varphi-\varphi' \quad \text{и} \quad \omega-\omega''>\varphi-\varphi''.$$

Такъ же, какъ и при доказательствѣ замѣчанiя къ теоремѣ I, убѣждаемся, что эти неравенства не могутъ существовать одновременно.

Итакъ p'' не можетъ равняться единицѣ.

Предположимъ, что $p'' \geqq 2$. На основаніи равенствъ (23) находимъ

$$\omega - \omega' = p'(\varphi - \varphi') + p''(\psi - \psi') \quad \text{и} \quad \omega - \omega'' = p'(\varphi - \varphi'') + p''(\psi - \psi'').$$

Очевидно, что $\omega - \omega'' \geqq \varphi - \varphi''$, и потому необходимо

$$\omega - \omega' < \varphi - \varphi'.$$

Слѣдовательно

$$p'(\varphi - \varphi') + p''(\psi - \psi') < \varphi - \varphi'. \tag{27}$$

Обозначимъ

$$p' = p''\delta' + r', \tag{28}$$

при чемъ

$$-p'' < r' \leqq 0.$$

Неравенство (27) представляемъ въ видѣ

$$p''[\delta'(\varphi - \varphi') + \psi - \psi'] + r'(\varphi - \varphi') < \varphi - \varphi'.$$

Для того, чтобы это неравенство было возможно, необходимо:

$$\delta'(\varphi - \varphi') + \psi - \psi' < \varphi - \varphi',$$

и потому

$$\delta' \leqq \delta.$$

На основаніи равенствъ (23) и (28) получаемъ

$$\omega' - \omega'' = p''[\delta'(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi''] + r'(\varphi' - \varphi''). \tag{29}$$

Замѣтимъ, что числа $\psi' - \psi''$ и $\delta(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi''$ одного знака, такъ какъ въ противномъ случаѣ существовали бы, на основаніи (26), неравенства

$$\delta(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi'' < 0 \quad \text{и} \quad \varphi' - \varphi'' < 0,$$

и слѣдовательно можно было бы найти цѣлое положительное число $\delta_1 < \delta$, удовлетворяющее условію

$$|\delta_1(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi''| \leqq 1.$$

Но въ такомъ случаѣ неравенства (24') были бы возможны при условіи: $0 < \delta_1 < \delta$, что противорѣчитъ доказанному раньше.

Поэтому, если $\delta' < \delta$, то необходимо

$$|\delta'(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi''| > 1.$$

На основаніи равенства (29) найдемъ

$$\omega' - \omega'' > p'',$$

такъ какъ

$$\delta'(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi'' > 1, \quad \varphi' - \varphi'' \leqq 0 \quad \text{и} \quad r' \leqq 0,$$

что невозможно при существованіи неравенствъ (24).

Слѣдовательно $\delta' = \delta$, и кромѣ того

$$|\delta(\varphi'-\varphi'')+\psi'-\psi''| \leqq 1. \tag{30}$$

Равенство (29) переписываемъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\omega'-\omega'' = p''[(\delta-1)(\varphi'-\varphi'')+\psi'-\psi'']+(p''+r')(\varphi'-\varphi'').$$

Такъ какъ

$$|(\delta-1)(\varphi'-\varphi'')+\psi'-\psi''| > 1 \quad \text{и} \quad |\varphi'-\varphi''| \leqq 1,$$

то на основаніи предыдущаго равенства получимъ

$$\omega'-\omega'' > -r'; \tag{31}$$

слѣдовательно $r' = 0$ или $r' = -1$. Не трудно убѣдиться въ томъ, что r' не можетъ быть равно нулю, и потому $r' = -1$. На основаніи равенства (28) получимъ

$$p' = p''\delta - 1.$$

Можно предполагать, что $p' > 1$, такъ какъ, если $p' = 1$, то $p'' = 2$ и $\delta = 1$, т. е. система (ω, ω', ω'') соотвѣтствуетъ комбинаціи (1, 2) согласно съ условіями теоремы.

На основаніи равенства

$$\omega-\omega'' = p'(\varphi-\varphi'')+p''(\psi-\psi'')$$

и условія $\omega < \varphi$ находимъ: $\varphi'' > 0$. На основаніи неравенства (31) получаемъ

$$\omega' > 0 \quad \text{и} \quad \omega'' < 0.$$

Обозначимъ

$$p = p''\varepsilon + r, \tag{32}$$

при чемъ

$$0 \leqq r < p''.$$

Пусть

$$\pi = \varepsilon+\delta\varphi+\psi, \quad \pi' = \varepsilon+\delta\varphi'+\psi' \quad \text{и} \quad \pi'' = \varepsilon+\delta\varphi''+\psi''. \tag{33}$$

На основаніи равенствъ (23), (28), (32) и (33) получаемъ

$$\omega = r-\varphi+p''\pi, \quad \omega' = r-\varphi'+p''\pi' \quad \text{и} \quad \omega'' = r-\varphi''+p''\pi''. \tag{34}$$

Число r не равно нулю, такъ какъ иначе на основаніи равенствъ

$$\omega'-(p''-1)\varphi' = p''(\pi'-\varphi') \quad \text{и} \quad \omega''-(p''-1)\varphi'' = p''(\pi''-\varphi'')$$

имѣли бы

$$|\pi'-\varphi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\pi''-\varphi''| < 1,$$

т. е. неравенства (24′) были бы возможны при $0 < \delta_1 < \delta$, что противорѣчитъ доказанному раньше. Слѣдовательно $r \geqq 1$. На основанiи равенствъ (34) получаемъ

$$\omega'+\varphi'-r = p''\pi' \quad \text{и} \quad \omega''+\varphi''-r = p''\pi'',$$

и потому

$$|\pi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\pi''| < 1.$$

На основанiи этихъ неравенствъ находимъ $\pi > 1$.

Слѣдовательно $\omega < \pi$, и на основанiи равенствъ (34)

$$\varphi > (p''-1)\pi + r. \tag{35}$$

На основанiи этого неравенства получаемъ: $\varphi > 2$. Замѣняя неравенство (35) неравенствомъ

$$\varphi > \pi - \pi''$$

или

$$\varphi > \delta(\varphi-\varphi'') + \psi - \psi'',$$

находимъ

$$(\delta-1)\varphi < \delta,$$

и потому $\delta = 1$. На основанiи равенствъ (33) имѣемъ

$$\pi - \pi'' = \varphi - \varphi'' + \psi - \psi''.$$

Слѣдовательно

$$\pi > \varphi - 2$$

или

$$\varphi < \pi + 2.$$

На основанiи неравенства (35) получаемъ

$$(p''-1)\pi + r < \pi + 2,$$

и необходимо $p'' = 2$. Такъ какъ $\delta = 1$, то $p' = 1$, что противорѣчитъ предположенiю.

Теорема такимъ образомъ доказана.

Замѣчанiе. *Если относительно системы коварiантныхъ формъ* (1) *извѣстно, что эта система можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида* (2), *и кромѣ того* $\psi < 0$, *то числа* $\varphi - \varphi'$ *и* $\psi - \psi'$ *различныхъ знаковъ, и между системами значенiй коварiантныхъ формъ* (1), *соотвѣтствующими комбинацiямъ* (1, 0) *и* (δ, 1), *находится первая система смежная съ системой* (1, 1, 1). *Исключенiе представляетъ только случай, когда выполнены условiя* (22). *Въ этомъ случаѣ искомая система находится между системами, соотвѣтствующими комбинацiямъ* (1, 0), (1, 1) *и* (1, 2).

§ 52.

Доказанныя въ предыдущемъ параграфѣ теоремы даютъ возможность установить алгориѳмъ, при помощи котораго каждая данная система коваріантныхъ формъ можетъ быть преобразована подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \omega\,, & \pi \\ 1, & \omega', & \pi' \\ 1, & \omega'', & \pi'' \end{bmatrix},$$

при чемъ эта система будетъ приведенной системой 1-го рода, если только $\omega > 1$.

Алгориѳмъ.

Данную систему коваріантныхъ формъ нужно преобразовать въ систему (1), *удовлетворяющую условіямъ леммы* § 49.

I-й случай: $\psi > 0$.

A) $\varphi - \varphi' < \psi - \psi'$. *Искомая система* $(\omega, \omega', \omega'')$ *находится между системами, соотвѣтствующими комбинаціямъ* (1, 0), (0, 1), (1, —1) *и* (2, —1).

B) $\varphi - \varphi' \geqq \psi - \psi'$. *Искомая система соотвѣтствуетъ одной изъ комбинацій* (1, 0), (0, 1) *и* (1, —1).

II-й случай: $\psi < 0$.

A) $\varphi - \varphi'$ *и* $\psi - \psi'$ *одного знака. Всѣ элементы одной изъ системъ* $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ *и* (ψ, ψ', ψ'') *по численной величинѣ меньше единицы.*

B) $\varphi - \varphi'$ *и* $\psi - \psi'$ *различныхъ знаковъ. Нужно опредѣлить цѣлое положительное число* δ *такъ, чтобы*

$\delta(\varphi - \varphi') + \psi - \psi'$ *было одного знака съ* $\varphi - \varphi'$ *и* $|\delta(\varphi - \varphi') + \psi - \psi'| < |\varphi - \varphi'|$.

Среди системъ, соотвѣтствующихъ комбинаціямъ (1, 0), (0, 1), (δ, 1) *и* (δ — 1, 1), *находится искомая система. Исключеніе представляетъ только случай, когда*

$$\delta = 1 \quad \textit{и} \quad |\delta(\varphi' - \varphi'') + \psi' - \psi''| \leqq 1. \tag{36}$$

Въ этомъ случаѣ искомая система соотвѣтствуетъ одной изъ комбинацій (1, 0), (0, 1), (1, 1) *и* (1, 2).

Замѣчаніе ко II-му случаю. *Когда извѣстно, что система*

(1, 1, 1) *представляетъ относительные тіпіта коваріантныхъ формъ* (1), *то искомая система* (ω, ω′, ω″) *соотвѣтствуетъ одной изъ комбинацій* (1, 0) *и* (δ, 1). *Исключеніе представляетъ только случай, когда выполнены условія* (36) — *тогда искомая система соотвѣтствуетъ одной изъ комбинацій* (1, 0), (1, 1) *и* (1, 2).

Предположимъ, что искомая система (ω, ω′, ω″) при помощи этого алгориѳма опредѣлена. Обозначимъ

$$\omega = p + p'\varphi + p''\psi, \quad \omega' = p + p'\varphi' + p''\psi' \quad \text{и} \quad \omega'' = p + p'\varphi'' + p''\psi''.$$

Одно изъ чиселъ p' и p'' равно по численной величинѣ единицѣ. Когда $p' = \pm 1$, условимся систему коваріантныхъ формъ (1) преобразовывать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & p' & 0 \\ 0 & p'' & 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Когда $|p'|$ не равно единицѣ, систему (1) будемъ преобразовывать подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & p' & 1 \\ 0 & p'' & 0 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

О системахъ коваріантныхъ формъ, зависящихъ отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

§ 53.

Предположимъ, что неприводимое уравненіе 3-й степени

$$\rho^3 = r\rho + s \tag{1}$$

имѣетъ три дѣйствительныхъ корня: ρ, ρ' и ρ''. Дискриминантъ

$$D = 4r^3 - 27s^2 \tag{2}$$

уравненія (1) есть цѣлое положительное раціональное число.

Обозначимъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{m + m'\rho + m''\rho^2}{\sigma}, & \varphi' &= \frac{m + m'\rho' + m''\rho'^2}{\sigma}, & \varphi'' &= \frac{m + m'\rho'' + m''\rho''^2}{\sigma} \\ \psi &= \frac{n + n'\rho + n''\rho^2}{\sigma}, & \psi' &= \frac{n + n'\rho' + n''\rho'^2}{\sigma}, & \psi'' &= \frac{n + n'\rho'' + n''\rho''^2}{\sigma} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Здѣсь σ, m, n, ... цѣлыя раціональныя числа, удовлетворяющія только одному условію: опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & \varphi' & \psi' \\ 1 & \varphi'' & \psi'' \end{vmatrix} = \varkappa$$

не равенъ нулю.

На основаніи равенствъ (3) и (2) находимъ

$$\varkappa = \frac{m'n'' - m''n'}{\sigma^2} \sqrt{D}; \tag{4}$$

слѣдовательно число $m'n'' - m''n'$ не должно быть равно нулю.

Систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix} \tag{5}$$

будемъ обозначать символомъ

$$\left[1, \quad \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{\sigma}, \quad \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{\sigma}\right]. \tag{5'}$$

Предположимъ, что система формъ (5) удовлетворяетъ условіямъ леммы § 49.

На основаніи равенствъ (3) получимъ

$$\left.\begin{aligned} \varphi'-\varphi'' &= (m'-m''\rho)\,\frac{\rho'-\rho''}{\sigma}, \quad & \psi'-\psi'' &= (n'-n''\rho)\,\frac{\rho'-\rho''}{\sigma} \\ \varphi''-\varphi &= (m'-m''\rho')\,\frac{\rho''-\rho}{\sigma}, \quad & \psi''-\psi &= (n'-n''\rho')\,\frac{\rho''-\rho}{\sigma} \end{aligned}\right\}.$$

Поэтому 1-е условіе леммы § 49 можно замѣнить слѣдующимъ:

Числа $m'-m''\rho$ *и* $n'-n''\rho$ *должны быть различныхъ знаковъ, при чемъ*

$$|m'-m''\rho| < \left|\frac{\sigma}{\rho'-\rho''}\right| \quad \textit{и} \quad |n'-n''\rho| > \left|\frac{\sigma}{\rho'-\rho''}\right|.$$

Числа $m'-m''\rho'$ *и* $n'-n''\rho'$ *должны быть одного знака, при чемъ*

$$|m'-m''\rho'| > |n'-n''\rho'|.$$

Число $\left|\frac{1}{\rho'-\rho''}\right|$ мы будемъ вычислять при помощи формулы

$$\left|\frac{1}{\rho'-\rho''}\right| = \left|\frac{3\rho^2-r}{\sqrt{D}}\right|. \tag{6}$$

Примѣръ.

Дано уравненіе

$$\rho^3 = 7\rho + 2.$$

Корни этого уравненія ρ, ρ' и ρ'' вычисляемъ съ точностью до 0,01:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} \rho \neq 2{,}78 & \rho' \neq -0{,}29 & \rho'' \neq -2{,}49 \\ \rho^2 \neq 7{,}72 & \rho'^2 \neq \ \ 0{,}08 & \rho''^2 \neq \ \ 6{,}20 \end{array}\right| . \tag{7}$$

$$D = 1264, \quad \sqrt{D} \neq 35{,}553.$$

На основаніи формулы (6) и этихъ данныхъ вычисляемъ

$$\left|\frac{1}{\rho'-\rho''}\right| \neq 0{,}454, \quad \left|\frac{1}{\rho''-\rho}\right| \neq 0{,}190 \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{\rho-\rho'}\right| \neq 0{,}326 \tag{8}$$

съ точностью до 0,001. Обозначимъ

$$M = 45{,}4, \quad M' = 19{,}0 \quad \text{и} \quad M'' = 32{,}6. \tag{8'}$$

Всѣ цѣлыя алгебраическія числа, зависящія отъ корня уравненія $\rho^3 = 7\rho + 2$, заключаются въ формѣ

$$X + X'\rho + X''\,\frac{\rho+\rho^2}{2}.$$

Этой формѣ соотвѣтствуетъ система коваріантныхъ формъ

$$\left[1, \ \ \rho, \ \ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right].$$

Эту систему представляемъ въ видѣ

$$\left[1, \ \ \frac{2\rho}{2}, \ \ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right] \tag{9}$$

и, полагая

$$m = 0, \quad m' = 2, \quad m'' = 0, \quad n = 0, \quad n' = 1, \quad n'' = 1 \quad \text{и} \quad \sigma = 2,$$

составляемъ бинарную систему коваріантныхъ формъ

$$\begin{bmatrix} m'-m''\rho, & n'-n''\rho \\ m'-m''\rho', & n'-n''\rho' \end{bmatrix},$$

которую замѣняемъ на основаніи (7) системой

$$\begin{bmatrix} 200, & -178 \\ 200, & 129 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Эту систему мы должны преобразовать въ приведенную систему 2-го рода:

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix},$$

коэффиціенты которой удовлетворяютъ слѣдующимъ условіямъ:

λ и μ различныхъ знаковъ, при чемъ $|\lambda| < \sigma M$ и $|\mu| > \sigma M$;

λ' и μ' одного знака, при чемъ $|\lambda'| > |\mu'|$.

На основаніи (8′) получаемъ неравенства

$$|\lambda| < 90{,}8 \quad \text{и} \quad |\mu| > 90{,}8.$$

Систему (10) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

преобразуемъ въ систему

$$\begin{bmatrix} 22, & -178 \\ 229, & 129 \end{bmatrix},$$

которая удовлетворяетъ 1-му условію леммы § 49.

Систему (9) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получимъ систему

$$\left[1, \quad \beta + \frac{3\rho+\rho^2}{2}, \quad \gamma + \frac{\rho+\rho^2}{2}\right].$$

Числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$\left|\beta + \frac{3\rho'+\rho'^2}{2}\right| < 1 \quad \text{и} \quad \left|\gamma + \frac{\rho'+\rho'^2}{2}\right| < 1.$$

Находимъ $\beta = 0$ и $\beta = 1$, $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$.

Вычисляемъ

$$\frac{3\rho''+\rho''^2}{2} \neq -0{,}64 \quad \text{и} \quad \frac{\rho''+\rho''^2}{2} \neq 1{,}85.$$

Ни при одномъ изъ значеній γ: 0 и 1 число $\gamma + \frac{\rho''+\rho''^2}{2}$ не меньше единицы, и потому полагаемъ $\gamma = 0$.

При обоихъ значеніяхъ β: 0 и 1 число $\beta + \frac{3\rho''+\rho''^2}{2}$ по численной величинѣ меньше единицы, и потому нужно найти еще число

$$\frac{3\rho+\rho^2}{2} \neq 8{,}03.$$

Слѣдовательно $\beta = 0$.

Система (9) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему

$$\left[1, \ \frac{3\rho+\rho^2}{2}, \ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right], \tag{11}$$

удовлетворяющую условіямъ леммы § 49.

Вычисляемъ коэффиціенты этой системы. Получаемъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & 8{,}03, & 5{,}25 \\ 1, & -0{,}40, & -0{,}11 \\ 1, & -0{,}64, & 1{,}85 \end{bmatrix}.$$

Такъ какъ $\psi > 0$ и $\varphi - \varphi' > \psi - \psi'$, то согласно съ алгориѳмомъ, установленнымъ въ § 52, мы должны найти системы значеній коваріантныхъ формъ (11), соотвѣтствующія комбинаціямъ (1, 0), (0, 1) и (1, —1).

Комбинацію (0, 1) нужно отбросить, такъ какъ эта комбинація очевидно невозможная. Комбинацію (1, — 1) также нужно отбросить, такъ какъ

$$\varphi' - \psi' \neq -0{,}29 \quad \text{и} \quad \varphi'' - \psi'' \neq -2{,}49,$$

и слѣдовательно неравенства

$$|t + \varphi' - \psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |t + \varphi'' - \psi''| < 1$$

не могутъ имѣть мѣста ни при какомъ значеніи t.

Приходимъ къ заключенію, что система $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ искомая, и потому система коваріантныхъ формъ (11) приведенная система 1-го рода.

Преобразуемъ систему (11) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и полученную систему представимъ въ нормальномъ видѣ:

$$\left[1, \ \frac{2+3\rho-\rho^2}{4}, \ \frac{-10+\rho+\rho^2}{4}\right]. \tag{12}$$

Преобразуемъ эту систему въ приведенную систему 1-го рода.

Составляемъ бинарную систему

$$\begin{bmatrix} 3+\rho, & 1-\rho \\ 3+\rho', & 1-\rho' \end{bmatrix},$$

которую замѣняемъ системой

$$\begin{bmatrix} 578, & -178 \\ 271, & 129 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Вычисляемъ σM. Такъ какъ $\sigma = 4$ и $M = 45{,}4$, то $\sigma M = 181{,}6$.

Систему (13) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

преобразуемъ въ систему

$$\begin{bmatrix} -178, & 934 \\ 129, & 13 \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

которая удовлетворяетъ 1-му условію леммы § 49.

Систему (12) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

въ систему

$$\left[1, \quad \beta + \frac{-10+\rho+\rho^2}{4}, \quad \gamma + \frac{22+\rho-3\rho^2}{4}\right].$$

Указаннымъ раньше способомъ находимъ: $\beta = 2$ и $\gamma = -5$. Получаемъ такимъ образомъ систему

$$\left[1, \quad \frac{-2+\rho+\rho^2}{4}, \quad \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right]. \qquad (15)$$

Эту систему замѣняемъ слѣдующей:

$$\begin{bmatrix} 1, & 2{,}12, & -4{,}59 \\ 1, & -0{,}55, & 0{,}37 \\ 1, & 0{,}43, & -4{,}77 \end{bmatrix}.$$

Такъ какъ $\psi < 0$, то согласно съ алгориѳмомъ § 52 опредѣляемъ δ изъ неравенствъ

$$0 < \delta(\varphi-\varphi') + \psi - \psi' < \varphi - \varphi',$$

т. е.

$$0 < \delta . 2{,}67 - 4{,}96 < 2{,}66;$$

слѣдовательно $\delta = 2$.

Искомая система $(\omega, \omega', \omega'')$ соотвѣтствуетъ одной изъ комбинацій

$$(1, 0) \text{ и } (2, 1).$$

Комбинаціи (1, 0) соотвѣтствуетъ система $(\varphi, \varphi', \varphi'')$. Комбинація (2, 1) невозможная, такъ какъ

$$2\varphi'+\psi' \neq -0{,}73 \quad \text{и} \quad 2\varphi''+\psi'' \neq -3{,}91,$$

и слѣдовательно неравенства

$$|t+2\varphi'+\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |t+2\varphi''+\psi''| < 1$$

не могутъ имѣть мѣста ни при какомъ значеніи t.

Приходимъ такимъ образомъ къ заключенію, что система $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ искомая, и система формъ (15) приведенная система 1-го рода. Эта система подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему

$$\left[1,\ \frac{4\rho-2\rho^2}{2},\ \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right],$$

которая подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ приведенную систему 1-го рода (11), раньше нами полученную.

Слѣдующій рядъ системъ и подстановокъ будетъ повторяться періодически:

$$\left[1,\ \frac{3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right] \quad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{2+3\rho-\rho^2}{4},\ \frac{-10+\rho+\rho^2}{4}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right] \quad \text{(II)}$$

$$\left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right] \quad \text{(II)}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{4\rho-2\rho^2}{2},\ \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right] \quad \text{(I) и т. д.}$$

Преобразуемъ теперь систему (9):

$$\left[1,\ \frac{2\rho}{2},\ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right] \qquad (9)$$

въ приведенную систему 2-го рода. Соотвѣтствующую бинарную систему

$$\begin{bmatrix} 2, & 1-\rho' \\ 2, & 1-\rho'' \end{bmatrix}$$

замѣняемъ системой

$$\begin{bmatrix} 200, & 129 \\ 200, & 349 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ $\sigma M' = 38{,}0$, и подстановкой

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

система (16) преобразуется въ приведенную систему

$$\begin{bmatrix} -13, & 58 \\ 647, & 498 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющую 1-му условію леммы § 49.

Въ подстановкѣ

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

числа β и γ опредѣляемъ изъ неравенствъ

$$\left|\beta + \frac{-\rho''+3\rho''^2}{2}\right| < 1 \quad \text{и} \quad |\gamma+\rho''^2| < 1.$$

Находимъ: $\beta = -10$ и -11, $\gamma = -6$ и -7.

Вычисляемъ

$$\frac{-\rho+3\rho^2}{2} \neq 10{,}19 \quad \text{и} \quad \rho^2 \neq 7{,}72;$$

слѣдовательно $\gamma = -7$.

Оба значенія β удовлетворяютъ неравенству

$$\left|\beta + \frac{-\rho+3\rho^2}{2}\right| < 1,$$

и потому вычисляемъ еще $\dfrac{-\rho'+3\rho'^2}{2} \neq 0{,}27$; слѣдовательно $\beta = -10$.

Система (9) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему

$$\left[1, \quad \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}, \quad 7-\rho^2\right], \tag{17}$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ леммы § 49 (послѣ замѣны ρ на ρ', ρ' на ρ'' и ρ'' на ρ).

Вычисливъ коэффиціенты системы (17), получимъ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & -0{,}19, & -0{,}72 \\ 1, & 9{,}73, & 6{,}92 \\ 1, & -0{,}55, & 0{,}80 \end{bmatrix}.$$

Такъ какъ $\psi' > 0$ и $\varphi' - \varphi'' > \psi' - \psi''$, то мы должны найти системы значеній формъ (17), соотвѣтствующія (при замѣнѣ ρ на ρ' и т. д.) комбинаціямъ (1, 0), (0, 1) и (1, —1). Комбинація (1, — 1) невозможная. Обѣ комбинаціи (1, 0) и (0, 1) возможныя, но $\psi' < \varphi'$, и потому система (ψ, ψ', ψ'') искомая. Система

$$\left[1, \ 7-\rho^2, \ \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}\right] \qquad (18)$$

приведенная система 2-го рода.

Преобразовавъ систему (18) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

получимъ систему

$$\left[1, \ \frac{6+\rho-\rho^2}{4}, \ \frac{-\rho}{2}\right] \text{ и т. д.}$$

Продолжая такимъ образомъ вычисленія, получимъ слѣдующій періодическій рядъ системъ и подстановокъ:

$$\left[1, \ 7-\rho^2, \ \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}\right] \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \ \frac{6+\rho-\rho^2}{4}, \ \frac{-\rho}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \ \frac{6+\rho-\rho^2}{4}, \ \frac{-10-3\rho+\rho^2}{4}\right] \quad (\mathrm{II})$$

$$\left[1, \ \frac{6+\rho-\rho^2}{4}, \ \frac{-10-3\rho+\rho^2}{4}\right] \quad (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \ \frac{-4-3\rho-\rho^2}{2}, \ 1+\rho\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 11 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\left[1, \ 7-\rho^2, \ \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}\right] \quad (\mathrm{I}) \text{ и т. д.}$$

Система (9) преобразуется въ приведенную систему 3-го рода подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получимъ такимъ образомъ систему

$$\left[1,\ \frac{-3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right].$$

Преобразовавъ эту систему подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ и т. д.,}$$

получимъ слѣдующій періодическій рядъ системъ и подстановокъ:

$$\left[1,\ \frac{-3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right] \quad (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-8-\rho+\rho^2}{2},\ \frac{4-\rho-\rho^2}{2}\right]$$

$$\left[1,\ \frac{-8-\rho+\rho^2}{2},\ \frac{4-\rho-\rho^2}{2}\right]$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left[1,\ \frac{-3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{-4-\rho+\rho^2}{2}\right] (\mathrm{I}) \text{ и т. д.}$$

Низшій предѣлъ численнаго значенія опредѣлителя

$$\varkappa = \begin{vmatrix} 1 & \varphi & \psi \\ 1 & \varphi' & \psi' \\ 1 & \varphi'' & \psi'' \end{vmatrix},$$

составленнаго изъ коэффиціентовъ приведенной системы коваріантныхъ формъ.

§ 54.

Теорема. *Если система коваріантныхъ формъ*

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & \varphi_1', & \psi_1' \\ 1, & \varphi_1'', & \psi_1'' \end{bmatrix} \qquad (1)$$

приведенная, того или другого рода, то опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ этой системы, по численной величинѣ больше единицы.

Преобразуемъ систему формъ (1) подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{2}$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющую условіямъ леммы § 49.

Опредѣлитель $\varkappa$, составленный изъ коэффиціентовъ системы (3), по численной величинѣ равенъ опредѣлителю системы (1). Этотъ опредѣлитель $\varkappa$ представимъ въ видѣ

$$\varkappa = (\varphi'-\varphi'')(\psi''-\psi)-(\varphi''-\varphi)(\psi'-\psi''). \tag{4}$$

По условію числа $\varphi'-\varphi''$ и $\psi'-\psi''$ различныхъ знаковъ, если только $\varphi'-\varphi''$ не равно нулю, при чемъ

$$|\varphi'-\varphi''| \leqq 1 \quad \text{и} \quad |\psi'-\psi''| > 1.$$

Не можетъ случиться, чтобы число $|\psi'-\psi''|$ не превосходило единицы, такъ какъ согласно 1-му условію леммы § 49 для этого необходимо: $\psi-\psi''=0$, и слѣдовательно тогда

$$|\psi| < 1, \quad |\psi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\psi''| < 1.$$

При существованіи этихъ неравенствъ система (1) не можетъ быть приведенной.

Числа $\varphi''-\varphi$ и $\psi''-\psi$ одного знака. Если $|\varphi''-\varphi| \geqq 1$, то на основаніи равенства (4) получимъ

$$|\varkappa| > 1,$$

и слѣдовательно теорема доказана. Предположимъ, что

$$|\varphi''-\varphi| < 1.$$

Мы предполагаемъ, что

$$|\varphi'| < 1, \quad |\varphi''| < 1 \quad \text{и} \quad \varphi > 0;$$

слѣдовательно $\varphi > 1$, иначе система (1) не была бы приведенной.

На основаніи неравенствъ

$$0 < \varphi-\varphi'' < 1$$

находимъ $\varphi'' > 0$, и потому $\varphi' < 0$.

Представимъ равенство (4) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varkappa = (\varphi-\varphi')(\psi'-\psi'') - (\varphi'-\varphi'')(\psi-\psi').$$

Если числа $\varphi - \varphi'$ и $\psi - \psi'$ одного знака, то теорема доказана, такъ какъ

$$\varphi-\varphi' > 1 \quad \text{и} \quad |\psi'-\psi''| > 1.$$

Предположимъ, что $\varphi - \varphi'$ и $\psi - \psi'$ различныхъ знаковъ. Такъ какъ

$$\varphi-\varphi' > 0, \quad \varphi-\varphi'' > 0 \quad \text{и} \quad \varphi'-\varphi'' < 0,$$

то

$$\psi-\psi' < 0, \quad \psi-\psi'' \geqq 0 \quad \text{и} \quad \psi'-\psi'' > 0. \tag{5}$$

Опредѣлимъ цѣлое положительное число δ изъ неравенствъ

$$0 \leqq \delta(\varphi-\varphi') + \psi-\psi' < \varphi-\varphi'.$$

Систему коваріантныхъ формъ (3) преобразуемъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

въ систему

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \pi \\ 1, & \varphi', & \pi' \\ 1, & \varphi'', & \pi'' \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здѣсь

$$\pi = \varepsilon+\delta\varphi+\psi, \quad \pi' = \varepsilon+\delta\varphi'+\psi' \quad \text{и} \quad \pi'' = \varepsilon+\delta\varphi''+\psi''.$$

Цѣлое число ε опредѣляемъ изъ неравенства

$$|\varepsilon+\delta\varphi'+\psi'| < 1.$$

Изъ двухъ значеній ε, удовлетворяющихъ этому неравенству, выбираемъ то, при которомъ численное значеніе $\varepsilon + \delta\varphi'' + \psi''$ наименьшее, но, если при обоихъ значеніяхъ ε существуетъ неравенство

$$|\varepsilon+\delta\varphi''+\psi''| < 1,$$

то ε выбираемъ такъ, чтобы число $|\varepsilon + \delta\varphi + \psi|$ было по возможности меньше.

Опредѣлитель системы (6) равенъ $\varkappa$. Представимъ $\varkappa$ въ видѣ

$$\varkappa = (\varphi-\varphi')(\pi'-\pi'') - (\varphi'-\varphi'')(\pi-\pi'). \tag{7}$$

По условію $\varphi - \varphi'$ и $\pi - \pi'$ положительныя числа, если $\pi - \pi'$ не равно нулю, и не трудно убѣдиться въ томъ, что $\varphi' - \varphi''$ и $\pi' - \pi''$ различныхъ знаковъ, т. е.

$$\varphi'-\varphi'' < 0 \quad \text{и} \quad \pi'-\pi'' > 0.$$

Слѣдовательно, если $\pi' - \pi'' \geqq 1$, то на основаніи равенства (7) получимъ

$$\varkappa > 1,$$

и теорема доказана. Предположимъ, что $0 < \pi' - \pi'' < 1$.

Въ этомъ случаѣ

$$|\pi'| < 1, \quad |\pi''| < 1 \quad \text{и} \quad \pi > 1. \tag{8}$$

Нельзя предполагать, что $\pi - \pi' \geqq 1$, такъ какъ, представляя равенство (7) въ видѣ

$$\varkappa = (\varphi - \varphi' - \pi + \pi')(\pi' - \pi'') - (\varphi' - \varphi'' - \pi' + \pi'')(\pi - \pi')$$

и принимая во вниманіе, что существуетъ неравенство

$$|\varphi' - \varphi'' - \pi' + \pi''| > 1,$$

найдемъ

$$\varkappa > 1.$$

Предположимъ, что $\pi - \pi' < 1$.

На основаніи этого неравенства и неравенствъ (8) находимъ

$$\pi > 1, \quad \pi' > 0 \quad \text{и} \quad \pi'' < 0.$$

Мы опредѣлили такимъ образомъ знаки всѣхъ коэффиціентовъ системы (6):

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi > 1, & \varphi' < 0, & \varphi'' > 0 \\ \pi > 1, & \pi' > 0, & \pi'' < 0 \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Неравенства

$$|\pi' - \varphi'| < 1 \quad \text{и} \quad |\pi'' - \varphi''| < 1 \tag{10}$$

не могутъ существовать одновременно, такъ какъ въ этомъ случаѣ необходимо $|\pi - \varphi| > 1$. Но на основаніи неравенствъ

$$\pi - \pi' < \varphi - \varphi' \quad \text{и} \quad \pi - \pi'' \geqq \varphi - \varphi''$$

найдемъ

$$\pi' - \varphi' > \pi - \varphi \geqq \pi'' - \varphi'',$$

и на основаніи (10)

$$1 > \pi - \varphi > -1,$$

что противорѣчитъ предположенію.

Предположимъ сначала, что

$$|\pi' - \varphi'| > 1.$$

Опредѣлитель $\varkappa$ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varkappa = \varphi\pi' - \varphi'\pi + \varphi''(\pi - \pi') - \pi''(\varphi - \varphi').$$

На основаніи неравенствъ (9) получимъ

$$\varkappa > \pi' - \varphi',$$

и потому

$$\varkappa > 1.$$

Предположимъ теперь, что

$$|\pi'' - \varphi''| > 1.$$

Опредѣлитель $\varkappa$ представимъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varkappa = \varphi''\pi - \varphi\pi'' - \varphi'(\pi - \pi'') + \pi'(\varphi - \varphi'').$$

На основаніи неравенствъ (9) найдемъ

$$\varkappa > 1.$$

Замѣчаніе. *Можно найти сколько угодно приведенныхъ системъ вида* (1), *опредѣлитель которыхъ* $\varkappa$ *по численной величинѣ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ единицы.*

Предположимъ, что ε, ε', ε'' и η, η', η'' положительныя числа, не превосходящія даннаго предѣла $\vartheta < \frac{1}{2}$.

Обозначимъ

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi = 1+\varepsilon, & \varphi' = -\varepsilon', & \varphi'' = \frac{1}{2} + \varepsilon'' \\ \psi = 1+\eta, & \psi' = \eta', & \psi'' = -\frac{1}{2} - \eta'' \end{array}\right\}.$$

Опредѣлитель системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix} \qquad (11)$$

при достаточно маломъ значеніи ϑ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ единицы, и не трудно убѣдиться въ томъ, что система (11) можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы данныя системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны.

§ 55.

Каждую данную систему коваріантныхъ формъ можно преобразо-

вать въ приведенную систему того или другого рода при помощи алгориѳма, установленнаго въ § 52. Въ этомъ можно убѣдиться такъ же, какъ и въ § 35 отдѣла II. На этомъ основанiи мы разсматриваемъ въ дальнѣйшемъ только приведенныя системы.

Предположимъ, что даны двѣ приведенныя системы коварiантныхъ формъ F и Φ, того или другого рода. Составимъ три безконечныхъ ряда приведенныхъ системъ

$$F_{01},\ F_{11},\ F_{21},\ \dots \quad \big| \quad F_{02},\ F_{12},\ \dots \quad \big| \quad F_{03},\ F_{13},\ \dots \qquad (1)$$

Приведенная система 1-го рода F_{01} получена изъ данной системы F при помощи подстановки вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad (2)$$

Приведенная система 1-го рода F_{11} получена изъ системы F_{01} при помощи подстановки

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и подстановки вида (2). Такимъ же образомъ получена приведенная система 1-го рода F_{21} изъ системы F_{11} и т. д.

Рядъ F_{02}, F_{12}, ... получается изъ данной системы F такимъ же образомъ, но только состоитъ изъ приведенныхъ системъ 2-го рода.

Рядъ F_{03}, F_{13}, ... состоитъ изъ приведенныхъ системъ 3-го рода.

Составимъ такимъ же образомъ три безконечныхъ ряда приведенныхъ системъ

$$\Phi_{01},\ \Phi_{11},\ \Phi_{21},\ \dots \quad \big| \quad \Phi_{02},\ \Phi_{12},\ \dots \quad \big| \quad \Phi_{03},\ \Phi_{13},\ \dots \qquad (1')$$

эквивалентныхъ данной системѣ Φ.

Ряды (1) и (1′) обладаютъ слѣдующимъ замѣчательнымъ свойствомъ.

Теорема. *Для того, чтобы приведенныя системы коварiантныхъ формъ F и Φ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы въ одномъ изъ рядовъ* (1) *находилась система, которая можетъ быть преобразована подстановкой вида* (2) *въ систему, принадлежащую къ одному изъ рядовъ* (1′).

Очевидно, что условiя теоремы достаточны для того, чтобы системы коварiантныхъ формъ F и Φ были эквивалентны. Нужно только показать, что эти условiя необходимы.

Предположимъ, что системы F и Ф эквивалентны и систему F подстановка

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{3}$$

преобразуетъ въ систему Ф. Обозначимъ

$$F = \begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1, & \xi, & \eta \\ 1, & \xi', & \eta' \\ 1, & \xi'', & \eta'' \end{bmatrix}.$$

Система F послѣ подстановки (3) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \tau, & \tau\xi, & \tau\eta \\ \tau', & \tau'\xi', & \tau'\eta' \\ \tau'', & \tau''\xi'', & \tau''\eta'' \end{bmatrix}.$$

Здѣсь

$$\left.\begin{array}{lll} \tau = \alpha+\alpha'\varphi+\alpha''\psi, & \tau' = \alpha+\alpha'\varphi'+\alpha''\psi', & \tau'' = \alpha+\alpha'\varphi''+\alpha''\psi'' \\ \tau\xi = \beta+\beta'\varphi+\beta''\psi, & \tau'\xi' = \beta+\beta'\varphi'+\beta''\psi', & \tau''\xi'' = \beta+\beta'\varphi''+\beta''\psi'' \\ \tau\eta = \gamma+\gamma'\varphi+\gamma''\psi, & \tau'\eta' = \gamma+\gamma'\varphi'+\gamma''\psi', & \tau''\eta'' = \gamma+\gamma'\varphi''+\gamma''\psi'' \end{array}\right\}.$$

Такъ какъ система Ф приведенная, то системы

$$(\tau, \tau', \tau'') \quad \text{и} \quad (\tau\xi, \tau'\xi', \tau''\xi'')$$

значеній коваріантныхъ формъ F представляютъ относительные minima этихъ формъ, и при томъ $(\tau\xi, \tau'\xi', \tau''\xi'')$ есть система смежная съ (τ, τ', τ'').

Составимъ три ряда послѣдовательныхъ относительныхъ minima (§ 44) значеній коваріантныхъ формъ F, начиная съ системы (1, 1, 1), при чемъ эту систему обозначимъ $(\omega, \omega', \omega'')$. Получимъ ряды:

$$(\omega, \omega', \omega''), \quad (\omega_{11}, \omega'_{11}, \omega''_{11}), \quad (\omega_{21}, \omega'_{21}, \omega''_{21}), \ldots \tag{I}$$

$$(\omega, \omega', \omega''), \quad (\omega_{12}, \omega'_{12}, \omega''_{12}), \quad (\omega_{22}, \omega'_{22}, \omega''_{22}), \ldots \tag{II}$$

$$(\omega, \omega', \omega''), \quad (\omega_{13}, \omega'_{13}, \omega''_{13}), \quad (\omega_{23}, \omega'_{23}, \omega''_{23}), \ldots \tag{III}$$

Начиная съ системы (τ, τ', τ''), составимъ три ряда послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ F:

$$(\tau, \tau', \tau''), \quad (\tau_{11}, \tau'_{11}, \tau''_{11}), \quad (\tau_{21}, \tau'_{21}, \tau''_{21}), \ldots \tag{I'}$$

$$(\tau, \tau', \tau''), \quad (\tau_{12}, \tau'_{12}, \tau''_{12}), \quad (\tau_{22}, \tau'_{22}, \tau''_{22}), \ldots \tag{II'}$$

$$(\tau, \tau', \tau''), \quad (\tau_{13}, \tau'_{13}, \tau''_{13}), \quad (\tau_{23}, \tau'_{23}, \tau''_{23}), \ldots \tag{III'}$$

На основаніи теоремы § 46, въ одномъ изъ рядовъ (I), (II) и (III) находится система, принадлежащая къ одному изъ рядовъ (I′), (II′) и (III′). Предположимъ, что система $(\omega_{mi}, \omega'_{mi}, \omega''_{mi})$, гдѣ i равно одному изъ чиселъ: 1, 2 и 3, находится въ одномъ изъ рядовъ (I′), (II′) и (III′) и обозначена черезъ $(\tau_{nj}, \tau'_{nj}, \tau''_{nj})$. Здѣсь $j = 1$, 2 и 3. Въ томъ случаѣ, когда $m = 0$, система $(\omega_{0i}, \omega'_{0i}, \omega''_{0i})$ тождественна съ системой $(\omega, \omega', \omega'')$. Это же замѣчаніе относится и къ системѣ $(\tau_{nj}, \tau'_{nj}, \tau''_{nj})$.

Такъ какъ по предположенію системы $(\omega_{mi}, \omega'_{mi}, \omega''_{mi})$ и $(\tau_{nj}, \tau'_{nj}, \tau''_{nj})$ тождественныя, то система коваріантныхъ формъ F_{mi}, принадлежащая къ одному изъ рядовъ (1), преобразуется подстановкой вида (2) въ систему Φ_{nj}, принадлежащую къ одному изъ рядовъ (1′). Доказательство этого предложенія не представляетъ затрудненій.

Замѣтимъ, что очень легко узнать, существуетъ ли подстановка вида (2), которая преобразуетъ данную систему

$$F_{mi} = \begin{bmatrix} 1, & \varphi_{mi}, & \psi_{mi} \\ 1, & \varphi'_{mi}, & \psi'_{mi} \\ 1, & \varphi''_{mi}, & \psi''_{mi} \end{bmatrix}$$

въ систему

$$\Phi_{nj} = \begin{bmatrix} 1, & \xi_{nj}, & \eta_{nj} \\ 1, & \xi'_{nj}, & \eta'_{nj} \\ 1, & \xi''_{nj}, & \eta''_{nj} \end{bmatrix}.$$

Коэффиціенты подстановки

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (2)$$

опредѣляются изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} \xi_{nj} &= \beta+\beta'\varphi_{mi}+\beta''\psi_{mi}, & \xi'_{nj} &= \beta+\beta'\varphi'_{mi}+\beta''\psi'_{mi}, & \xi''_{nj} &= \beta+\beta'\varphi''_{mi}+\beta''\psi''_{mi} \\ \eta_{nj} &= \gamma+\gamma'\varphi_{mi}+\gamma''\psi_{mi}, & \eta'_{nj} &= \gamma+\gamma'\varphi'_{mi}+\gamma''\psi'_{mi}, & \eta''_{nj} &= \gamma+\gamma'\varphi''_{mi}+\gamma''\psi''_{mi} \end{aligned}\right\}.$$

Если опредѣлители системъ F_{mi} и Φ_{nj} по численной величинѣ не равны между собой, то опредѣлитель подстановки (2) не можетъ по численной величинѣ быть равенъ единицѣ. Въ этомъ случаѣ очевидно, что система F_{mi} не можетъ быть преобразована въ систему Φ_{nj} подстановкой (2).

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ, начиная съ нѣкоторой системы, состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ.

§ 56.

Доказанная въ предыдущемъ параграфѣ теорема даетъ возможность узнать, эквивалентны ли данныя системы коваріантныхъ формъ или нѣтъ, въ тѣхъ случаяхъ, когда въ соотвѣтствующихъ имъ безконечныхъ рядахъ приведенныхъ системъ число различныхъ системъ конечно.

Теорема. *Для того, чтобы рядъ приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ одного и того же рода*

$$F_{0i},\ F_{1i},\ F_{2i},\ \ldots$$

эквивалентныхъ данной системѣ

$$F = \begin{vmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

начиная съ нѣкоторой системы F_{ki}, *состоялъ изъ періодически повторяющихся членовъ, необходимо и достаточно, чтобы коэффиціенты системы* (1): φ *и* ψ *были алгебраическія числа, зависящія отъ корня неприводимаго уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, а* φ', ψ' *и* φ'', ψ'' *были бы алгебраическія числа соотвѣтственно сопряженныя съ числами* φ *и* ψ. *Число* i *равняется одному изъ чиселъ:* 1, 2 *и* 3.

Теорема эта доказывается на основаніи §§ 53 и 54 такъ же, какъ доказывается соотвѣтствующая теорема § 36 отдѣла II.

Условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы данныя системы коваріантныхъ формъ, зависящія отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, были эквивалентны.

§ 57.

Теорема. *Предположимъ, что ряды приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ*

$$F_{0i},\ F_{1i},\ F_{2i},\ \ldots \quad \text{и} \quad \Phi_{0j},\ \Phi_{1j},\ \Phi_{2j},\ \ldots$$

соотвѣтственно эквивалентныхъ даннымъ системамъ F *и* Φ, *зависящимъ отъ корней одного и того же уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, начиная съ системъ* F_{ki} *и* Φ_{hj}, *состоятъ изъ періодически повторяющихся системъ*

$$F_{ki},\ F_{k+1,i},\ldots F_{k+m-1,i} \quad \text{и} \quad \Phi_{hj},\ \Phi_{h+1,j},\ldots \Phi_{h+n-1,j}. \qquad (1)$$

Для того, чтобы системы F и Φ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала подстановка вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

которая преобразуетъ одну изъ системъ періода F_{ki}, $F_{k+1,i}$, ... въ одну изъ системъ періода Φ_{hj}, $\Phi_{h+1,j}$, ... Предполагается, что i и j различныя числа равныя каждое одному изъ чиселъ: 1, 2 и 3.

Разсмотримъ случай, когда $i=2$ и $j=3$. Всѣ остальные случаи можно привести къ этому случаю, производя соотвѣтствующую перестановку коваріантныхъ формъ.

Системы, принадлежащія къ періодамъ (1), обозначимъ

$$F_k,\ F_{k+1},\ldots F_{k+m-1} \quad \text{и} \quad \Phi_h,\ \Phi_{h+1},\ldots \Phi_{h+n-1}. \qquad (1')$$

Если системы F и Φ эквивалентны, то системы F_k и Φ_h также эквивалентны. Предположимъ, что система F_k преобразуется въ систему Φ_h подстановкой

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad (2)$$

Обозначимъ

$$F_i = \begin{bmatrix} 1, & \varphi_i, & \psi_i \\ 1, & \varphi_i', & \psi_i' \\ 1, & \varphi_i'', & \psi_i'' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi_j = \begin{bmatrix} 1, & \xi_j, & \eta_j \\ 1, & \xi_j', & \eta_j' \\ 1, & \xi_j'', & \eta_j'' \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Здѣсь $i=k,\ k+1,\ldots;\ j=h,\ h+1,\ldots$

Система F_k послѣ подстановки (2) принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \tau_0, & \tau_0\xi_h, & \tau_0\eta_h \\ \tau_0', & \tau_0'\xi_h', & \tau_0'\eta_h' \\ \tau_0'', & \tau_0''\xi_h'', & \tau_0''\eta_h'' \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

гдѣ

$$\tau_0 = \alpha + \alpha'\varphi_k + \alpha''\psi_k, \quad \tau_0\xi_h = \beta + \beta'\varphi_k + \beta''\psi_k, \quad \tau_0\eta_h = \gamma + \gamma'\varphi_k + \gamma''\psi_k \ \text{и т. д.}$$

Составимъ рядъ (II) (§ 44) послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ F_k, начиная съ системы (1, 1, 1), которую обозначимъ $(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0'')$. Получимъ рядъ

$$(\omega_0,\ \omega_0',\ \omega_0''),\quad (\omega_1,\ \omega_1',\ \omega_1''),\quad (\omega_2,\ \omega_2',\ \omega_2''),\ \ldots \qquad (\text{II})$$

Въ этомъ ряду при всѣхъ значеніяхъ i система $(\omega_{i+1}, \omega'_{i+1}, \omega''_{i+1})$ есть вторая система смежная съ системой $(\omega_i, \omega'_i, \omega''_i)$.

Такъ какъ Φ_h приведенная система 3-го рода, то, на основаніи равенствъ (3), система коваріантныхъ формъ (4) есть приведенная система 3-го рода.

Приходимъ къ заключенію, что $(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0)$ и $(\tau_0\xi_h, \tau'_0\xi'_h, \tau''_0\xi''_h)$ системы, представляющія относительные minima коваріантныхъ формъ F_k, и при томъ система $(\tau_0\xi_h, \tau'_0\xi'_h, \tau''_0\xi''_h)$ третья система смежная съ $(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0)$.

Составимъ рядъ (III) послѣдовательныхъ относительныхъ minima значеній коваріантныхъ формъ F_k, начиная съ системы $(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0)$. Получимъ рядъ

$$(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0), \quad (\tau_1, \tau'_1, \tau''_1), \quad (\tau_2, \tau'_2, \tau''_2), \ldots \qquad \text{(III)}$$

Всѣ системы, принадлежащія къ періоду

$$F_k, \; F_{k+1}, \ldots F_{k+m-1},$$

приведенныя системы 2-го рода. Система F_{k+i} получена изъ системы F_{k+i-1} при помощи подстановки σ_i равной произведенію подстановокъ

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \beta_i & \gamma_i \\ 0 & \beta'_i & \gamma'_i \\ 0 & \beta''_i & \gamma''_i \end{vmatrix}.$$

Алгориѳмъ, при помощи котораго получаются коэффиціенты подстановки σ_i, установленъ въ § 52.

Произведеніе подстановокъ

$$S = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_m$$

представляетъ подстановку S, которая преобразуетъ систему F_k въ систему F_{k+m}. По условію системы F_k и F_{k+m} тождественны, и потому подстановка S не измѣняетъ системы F_k *). Обозначимъ

$$S = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Послѣ подстановки S система F_k принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} E_2, & E_2\varphi_k, & E_2\psi_k \\ E'_2, & E'_2\varphi'_k, & E'_2\psi'_k \\ E''_2, & E''_2\varphi''_k, & E''_2\psi''_k \end{bmatrix},$$

*) См. § 13 отдѣла I.

гдѣ

$$E_2 = p + p'\varphi_k + p''\psi_k, \quad E_2' = p + p'\varphi_k' + p''\psi_k' \quad \text{и} \quad E_2'' = p + p'\varphi_k'' + p''\psi_k''.$$

Числа E_2, E_2' и E_2'' сопряженныя алгебраическія единицы.

Не трудно убѣдиться въ томъ, что

$$E_2 = \varphi_k\varphi_{k+1}\ldots\varphi_{k+m-1}, \quad E_2' = \varphi_k'\varphi_{k+1}'\ldots\varphi_{k+m-1}' \quad \text{и} \quad E_2'' = \varphi_k''\varphi_{k+1}''\ldots\varphi_{k+m-1}''. \qquad (5)$$

Такъ какъ мы обозначаемъ

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \varphi_k, \quad \omega_2 = \varphi_k\varphi_{k+1}, \ldots$$

то

$$E_2 = \omega_m, \quad E_2' = \omega_m', \quad E_2'' = \omega_m'',$$

и при всякомъ положительномъ значеніи цѣлаго раціональнаго числа u существуютъ равенства

$$E_2^u = \omega_{mu}, \quad (E_2')^u = \omega_{mu}', \quad (E_2'')^u = \omega_{mu}''.$$

Замѣтимъ, что, на основаніи равенствъ (5), существуютъ неравенства

$$|E_2| < 1, \quad |E_2'| > 1 \quad \text{и} \quad |E_2''| < 1,$$

такъ какъ F_k, F_{k+1}, ... приведенныя системы 2-го рода, и слѣдовательно

$$|\varphi_i| < 1, \quad |\varphi_i'| > 1, \quad |\varphi_i''| < 1, \quad (i = k, k+1, \ldots).$$

Дополнимъ безконечный рядъ (II) системами $(\omega_{-1}, \omega_{-1}', \omega_{-1}'')$, $(\omega_{-2}, \omega_{-2}', \omega_{-2}'')$, ... Систему $(\omega_{-i}, \omega_{-i}', \omega_{-i}'')$ опредѣляемъ равенствами

$$\omega_{-i} = E_2^{-1}\omega_{m-i}, \quad \omega_{-i}' = (E_2')^{-1}\omega_{m-i}', \quad \omega_{-i}'' = (E_2'')^{-1}\omega_{m-i}'';$$

поэтому система $(\omega_{-i}, \omega_{-i}', \omega_{-i}'')$ представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ F_k при всякомъ значеніи i.

Получаемъ безконечный рядъ

$$\ldots(\omega_{-1}, \omega_{-1}', \omega_{-1}''), \quad (\omega_0, \omega_0', \omega_0''), \quad (\omega_1, \omega_1', \omega_1''), \ldots \qquad (\text{II}')$$

При всякомъ значеніи i положительномъ и отрицательномъ система $(\omega_{i+1}, \omega_{i+1}', \omega_{i+1}'')$ есть вторая системá смежная съ $(\omega_i, \omega_i', \omega_i'')$.

Элементы системъ ряда (II'), на основаніи § 43, удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l} \cdots > |\omega_{-1}| > |\omega_0| > |\omega_1| > \cdots \\ \cdots < |\omega_{-1}'| < |\omega_0'| < |\omega_1'| < \cdots \\ \cdots > |\omega_{-1}''| > |\omega_0''| > |\omega_1''| > \cdots \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Періодъ Φ_h, Φ_{h+1}, ... Φ_{h+n-1} состоитъ изъ приведенныхъ системъ 3-го рода. Обозначимъ

$$E_3 = \xi_h\xi_{h+1}\ldots\xi_{h+n-1}, \quad E_3' = \xi_h'\xi_{h+1}'\ldots\xi_{h+n-1}' \quad \text{и} \quad E_3'' = \xi_h''\xi_{h+1}''\ldots\xi_{h+n-1}''.$$

Сопряженныя алгебраическія единицы E_3, E'_3 и E''_3 удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|E_3| < 1, \quad |E'_3| < 1 \quad \text{и} \quad |E''_3| > 1. \tag{7}$$

Такъ какъ по условію

$$\tau_1 = \tau_0 \xi_h, \quad \tau_2 = \tau_0 \xi_h \xi_{h+1}, \ldots$$

то

$$\tau_n = \tau_0 E_3, \quad \tau'_n = \tau'_0 E'_3 \quad \text{и} \quad \tau''_n = \tau''_0 E''_3,$$

и при всякомъ положительномъ значеніи цѣлаго раціональнаго числа v существуютъ равенства:

$$\tau_{nv} = \tau_0 E_3^v, \quad \tau'_{nv} = \tau'_0 (E'_3)^v \quad \text{и} \quad \tau''_{nv} = \tau''_0 (E''_3)^v.$$

Дополнимъ рядъ (III) системами $(\tau_{-1}, \tau'_{-1}, \tau''_{-1})$, $(\tau_{-2}, \tau'_{-2}, \tau''_{-2}), \ldots$

Систему $(\tau_{-j}, \tau'_{-j}, \tau''_{-j})$ опредѣляемъ равенствами

$$\tau_{-j} = E_3^{-1} \tau_{n-j}, \quad \tau'_{-j} = (E'_3)^{-1} \tau'_{n-j} \quad \text{и} \quad \tau''_{-j} = (E''_3)^{-1} \tau''_{n-j}. \tag{8}$$

Поэтому система $(\tau_{-j}, \tau'_{-j}, \tau''_{-j})$ представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ F_k при всякомъ значеніи j.

Получаемъ безконечный рядъ

$$\ldots (\tau_{-1}, \tau'_{-1}, \tau''_{-1}), \quad (\tau_0, \tau'_0, \tau''_0), \quad (\tau_1, \tau'_1, \tau''_1), \ldots \tag{III'}$$

При всякомъ значеніи j положительномъ и отрицательномъ система $(\tau_{j+1}, \tau'_{j+1}, \tau''_{j+1})$ есть 3-я система смежная съ $(\tau_j, \tau'_j, \tau''_j)$. Слѣдовательно

$$\left.\begin{array}{l} \cdots > |\tau_{-1}| > |\tau_0| > |\tau_1| > \cdots \\ \cdots > |\tau'_{-1}| > |\tau'_0| > |\tau'_1| > \cdots \\ \cdots < |\tau''_{-1}| < |\tau''_0| < |\tau''_1| < \cdots \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Для того, чтобы закончить доказательство предложенной теоремы, нужно только доказать, что въ ряду (II') находится система, которая принадлежитъ къ ряду (III'). Способъ доказательства примѣнимъ такой же, какъ и въ § 46.

На основаніи неравенствъ (7) и (9) и равенствъ (8) убѣждаемся, что, какая бы ни была выбрана въ ряду (II') система $(\omega_i, \omega'_i, \omega''_i)$, всегда можно найти въ ряду (III') систему $(\tau_j, \tau'_j, \tau''_j)$, элементы которой удовлетворяютъ неравенствамъ:

$$|\tau_j| > |\omega_i| \quad \text{и} \quad |\tau'_j| > |\omega'_i|. \tag{10}$$

Предположимъ, что такое значеніе r числа j опредѣлено. При данномъ значеніи $j = r$ существуетъ конечное число значеній i, удовлетворяющихъ неравенствамъ (10).

Пусть всѣ эти значенія i заключаются въ предѣлахъ

$$i_0 \leq i \leq i_1. \tag{11}$$

Можетъ случиться, что при $j > r$ можно будетъ найти значенія i, удовлетворяющія неравенствамъ (10). На основаніи неравенствъ (9) убѣждаемся, что всѣ эти значенія чиселъ i заключаются въ предѣлахъ (11), и потому число j, удовлетворяющее неравенствамъ (10), не можетъ превосходить конечнаго предѣла. Предположимъ, что $j = r$ наибольшее число, при которомъ неравенства (10) возможны. Если при $j = r$ неравенствамъ (10) удовлетворяетъ нѣсколько значеній числа i, то изъ нихъ выберемъ наибольшее, которое обозначимъ $i = s$. На основаніи неравенствъ (10) получимъ

$$|\tau_r| > |\omega_s| \quad \text{и} \quad |\tau'_r| > |\omega'_s|,$$

но на основаніи неравенствъ (6)

$$|\tau_r| > |\omega_{s+1}| \quad \text{и} \quad |\tau'_r| < |\omega'_{s+1}|.$$

Слѣдовательно

$$|\tau'_{r+1}| < |\omega'_{s+1}|.$$

Если бы оказалось, что системы $(\tau_{r+1}, \tau'_{r+1}, \tau''_{r+1})$ и $(\omega_s, \omega'_s, \omega''_s)$ тождественны, то теорема доказана. Предполагая, что эти системы различныя, находимъ

$$|\tau''_{r+1}| < |\omega''_s| \tag{12}$$

и

$$|\tau_{r+1}| > |\omega_s|. \tag{13}$$

Въ ряду (II′) можно найти сколько угодно системъ $(\omega_{s_0}, \omega'_{s_0}, \omega''_{s_0})$, элементы которыхъ удовлетворяютъ условію

$$|\tau_{r+1}| < |\omega_{s_0}|, \tag{14}$$

при чемъ, конечно,

$$s_0 < s.$$

Предположимъ, что такая система $(\omega_{s_0}, \omega'_{s_0}, \omega''_{s_0})$ выбрана. Находимъ число i, опредѣляемое условіями:

$$s_0 \leq i < s \tag{15}$$

и

$$|\omega_{i+1}| \leq |\tau_{r+1}| < |\omega_i|. \tag{16}$$

На основаніи неравенствъ (12), (15) и (6) получимъ

$$|\tau''_{r+1}| < |\omega''_i|,$$

и слѣдовательно

$$|\tau'_{r+1}| > |\omega'_{i+1}|,$$

если только системы $(\tau_{r+1}, \tau'_{r+1}, \tau''_{r+1})$ и $(\omega_{i+1}, \omega'_{i+1}, \omega''_{i+1})$ не тождественныя.

На основаніи неравенствъ (16) найдемъ

$$|\tau_{r+1}| > |\omega_{i+1}| \quad \text{и} \quad |\tau'_{r+1}| > |\omega'_{i+1}|.$$

Слѣдовательно, неравенства (10) возможны при $j = r + 1$, что противорѣчитъ предположенію.

Итакъ въ рядахъ (II') и (III') находятся двѣ тождественныхъ системы. Предположимъ, что

$$\omega_i = \tau_j, \quad \omega'_i = \tau'_j \quad \text{и} \quad \omega''_i = \tau''_j. \tag{17}$$

Обозначимъ

$$\omega_i = E_2^u \omega_r \quad \text{и} \quad \tau_j = E_3^v \tau_s,$$

гдѣ

$$0 \leq r < m \quad \text{и} \quad 0 \leq s < n.$$

Система F_k послѣ подстановки

$$S^u \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_r$$

принимаетъ видъ

$$\begin{bmatrix} \omega_i, & \omega_i \varphi_{k+r}, & \omega_i \psi_{k+r} \\ \omega'_i, & \omega'_i \varphi'_{k+r}, & \omega'_i \psi'_{k+r} \\ \omega''_i, & \omega''_i \varphi''_{k+r}, & \omega''_i \psi''_{k+r} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Приведя эту систему къ нормальному виду, получимъ систему F_{k+r}.

Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ подстановку, которая систему F_k приводитъ къ виду

$$\begin{bmatrix} \tau_j, & \tau_j \xi_{h+s}, & \tau_j \eta_{h+s} \\ \tau'_j, & \tau'_j \xi'_{h+s}, & \tau'_j \eta'_{h+s} \\ \tau''_j, & \tau''_j \xi''_{h+s}, & \tau''_j \eta''_{h+s} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Приведя эту систему къ нормальному виду, получимъ систему Φ_{h+s}.

Слѣдовательно, существуетъ подстановка, которая систему (18) приводитъ къ виду (19). На основаніи равенствъ (17) и § 40 убѣждаемся въ томъ, что подстановка эта имѣетъ видъ

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Эта же подстановка систему F_{k+r} преобразуетъ въ систему Φ_{h+s}.

О подстановкахъ, не измѣняющихъ системы коваріантныхъ формъ.

§ 58.

Теорема. *Каждая подстановка Σ, не измѣняющая системы коваріантныхъ формъ, коэффиціенты которой зависятъ отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, можетъ быть представлена въ видѣ*

$$\Sigma = S^u T^v,$$

гдѣ S и T основныя независимыя подстановки, а u и v цѣлыя раціональныя числа положительныя или отрицательныя.

Сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа, предположимъ, что данной системѣ коваріантныхъ формъ F соотвѣтствуетъ церіодъ различныхъ приведенныхъ системъ 2-го рода: $F_k, F_{k+1}, \ldots F_{k+m-1}$. Для удобства обозначимъ системы этого періода слѣдующимъ образомъ:

$$F_0, F_1, \ldots F_{m-1}. \tag{1}$$

Систему F_0 преобразуемъ подстановкой

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{2}$$

въ приведенную систему 3-го рода Φ_0. Начиная съ этой системы, составимъ рядъ приведенныхъ системъ 3-го рода

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots \tag{3}$$

Среди системъ

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots \tag{3'}$$

мы всегда найдемъ систему, которая можетъ быть преобразована подстановкой вида (2) въ одну изъ системъ періода (1). Въ этомъ убѣждаемся на основаніи §§ 56 и 57.

Предположимъ, что между системами (3′) система Φ_r есть первая, которую можно преобразовать въ одну изъ системъ періода (1) подстановкой вида (2). Предположимъ, что система Φ_r преобразуется подстановкой ε' въ систему F_s.

Такъ же, какъ въ предыдущемъ параграфѣ, опредѣляемъ подстановку

$$S = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m, \tag{4}$$

которая не измѣняетъ системы F_0.

Всѣ подстановки, которыя могутъ быть представлены въ видѣ S^u,

гдѣ u цѣлое раціональное число, не измѣняютъ системы формъ F_0. Но въ этой формѣ заключаются не всѣ подстановки, не измѣняющія системы F_0. Мы можемъ найти такую подстановку еще слѣдующимъ образомъ. По условію система F_0 преобразуется въ систему Φ_0 подстановкой ε. Предположимъ, что система Φ_j, принадлежащая къ ряду (3), получается изъ системы Φ_{j-1} при помощи подстановки σ'_j; слѣдовательно система Φ_0 преобразуется подстановкой равной произведенію подстановокъ

$$\sigma'_1 \sigma'_2 \dots \sigma'_r$$

въ систему Φ_r. Система Φ_r преобразуется въ систему F_s подстановкой ε' и система F_s — въ систему F_m подстановкой

$$\sigma_{s+1} \dots \sigma_m.$$

Обозначая

$$T = \varepsilon \sigma'_1 \dots \sigma'_r \varepsilon' \sigma_{s+1} \dots \sigma_m, \tag{5}$$

найдемъ подстановку T, не измѣняющую системы F_0.

Замѣтимъ, что при всѣхъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ u и v подстановка

$$S^u T^v = T^v S^u$$

не измѣняетъ системы F_0.

Мы получили такимъ образомъ двѣ независимыхъ основныхъ подстановки S и T. Всякая другая подстановка Σ, не измѣняющая системы F_0, можетъ быть представлена въ видѣ

$$\Sigma = S^u T^v, \tag{6}$$

гдѣ u и v цѣлыя раціональныя числа. При этомъ мы не считаемъ различными подстановки

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ -\alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ -\alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Предположимъ, что подстановки S, T и Σ опредѣляютъ алгебраическія единицы E_2, E и e. Для того, чтобы равенство (6) существовало, необходимо и достаточно, чтобы существовало равенство

$$e = \pm E_2^u E^v. \tag{6'}$$

Мы предполагаемъ, что подстановка S опредѣляетъ алгебраическую единицу E_2. Пусть E_2, E_2'' и E_2''' сопряженныя единицы. Предположимъ также, что E, E' и E'' сопряженныя единицы, опредѣляемыя подстанов-

кой T. Обозначимъ приведенныя системы, принадлежащія къ рядамъ (1) и (3), такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1, & \varphi_0, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_0', & \varphi_1' \\ 1, & \varphi_0'', & \varphi_1'' \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1, & \xi_0, & \eta_0 \\ 1, & \xi_0', & \eta_0' \\ 1, & \xi_0'', & \eta_0'' \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Поэтому на основаніи равенствъ (4) и (5) находимъ

$$\left.\begin{array}{lll} E_2 = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{m-1}, & E_2' = \varphi_0'\varphi_1' \ldots \varphi_{m-1}', & E_2'' = \varphi_0''\varphi_1'' \ldots \varphi_{m-1}'' \\ E = \xi_0 \ldots \xi_{r-1}\varphi_r \ldots \varphi_{m-1}, & E' = \xi_0' \ldots \xi_{r-1}'\varphi_r' \ldots \varphi_{m-1}', & E'' = \xi_0'' \ldots \xi_{r-1}''\varphi_r'' \ldots \varphi_{m-1}'' \end{array}\right\}. \qquad (8)$$

Такъ же, какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, составимъ, начиная съ системы (1, 1, 1), рядъ (II')

$$\ldots (\omega_{-1}, \omega_{-1}', \omega_{-1}''), \quad (\omega_0, \omega_0', \omega_0''), \quad (\omega_1, \omega_1', \omega_1''), \ldots \qquad (II')$$

системъ, представляющихъ относительные minima коваріантныхъ формъ F_0. Предполагается, что въ этомъ ряду при всякомъ значеніи числа i система $(\omega_{i+1}, \omega_{i+1}', \omega_{i+1}'')$ есть вторая система смежная съ системой $(\omega_i, \omega_i', \omega_i'')$.

Мы обозначаемъ здѣсь

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = \varphi_0, \quad \omega_2 = \varphi_0\varphi_1, \ldots$$

и

$$\omega_{-1} = E_2^{-1}\omega_{m-1}, \quad \omega_{-2} = E_2^{-1}\omega_{m-2},$$

такъ что при всѣхъ значеніяхъ i и u существуетъ равенство

$$\omega_{i+mu} = E_2^u \omega_i.$$

На основаніи равенствъ (8) находимъ

$$\omega_r E = \xi_0\xi_1 \ldots \xi_{r-1} E_2.$$

Для краткости обозначимъ

$$\xi_0\xi_1 \ldots \xi_{r-1} = \xi, \qquad (9)$$

и потому

$$\omega_r E = \xi E_2, \quad \text{или} \quad \omega_r E = \xi \omega_m. \qquad (10)$$

Мы предполагаемъ, что подстановка Σ не измѣняетъ системы F_0 и опредѣляетъ сопряженныя алгебраическія единицы e, e' и e''. На основаніи предыдущаго, система (e, e', e'') представляетъ относительные minima коваріантныхъ формъ F_0.

Замѣтимъ, что если бы равенство (6') не могло существовать ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ чиселъ u и v, то ни при какихъ значеніяхъ чиселъ v, i и j равенство

$$|\xi E^v \omega_i| = |\omega_j| \qquad (11)$$

не имѣло бы мѣста, такъ какъ изъ равенства (11) слѣдуетъ:

$$|eE^v\omega_{i+k}| = |\omega_{\cdot+k}|$$

при всякомъ значеніи k, и потому при $k = -i$

$$|eE^v| = |\omega_{j-i}|.$$

Полагая $\omega_{j-i} = E_2^u\omega_h$, гдѣ $0 \leq h < m$, найдемъ

$$|eE^v| = |E_2^u\omega_h|,$$

т. е.

$$\omega_h = \pm eE^vE_2^{-u}. \tag{12}$$

На основаніи этого равенства приходимъ къ заключенію, что системы F_0 и F_h, принадлежащія къ періоду (1), тождественныя. Слѣдовательно $h = 0$, и на основаніи равенства (12)

$$e = \pm E_2^u E^{-v},$$

что противорѣчитъ предположенію.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы докажемъ, что всегда можно найти цѣлыя числа v, i и j, удовлетворяющія равенству (11). Какъ только числа v, i и j будутъ извѣстны, полагая $j - i = mu$, найдемъ цѣлыя раціональныя числа u и v, удовлетворяющія равенству

$$\Sigma = S^uT^{-v}.$$

Предлагаемое нами доказательство основано на слѣдующемъ предложеніи:

Если e, e' и e'' сопряженныя единицы, опредѣляемыя подстановкой, не измѣняющей системы формъ F_0, и при нѣкоторыхъ значеніяхъ чиселъ i и j существуютъ неравенства

$$|e\omega_i| > |\omega_j| \quad u \quad |e'\omega'_j| > |\omega'_j|, \tag{13}$$

то при всякомъ данномъ значеніи числа i можно найти число j, удовлетворяющее этимъ неравенствамъ.

Предположимъ, что при $i = k$ существуютъ неравенства

$$|e\omega_k| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |e'\omega'_k| > |\omega'_j|. \tag{13'}$$

По условію (§ 44) элементы системъ ряда (II′) удовлетворяютъ неравенствамъ

$$\left.\begin{array}{l}\cdots > |\omega_{-1}| > |\omega_0| > |\omega_1| > \cdots \\ \cdots < |\omega'_{-1}| < |\omega'_0| < |\omega'_1| < \cdots \\ \cdots > |\omega''_{-1}| > |\omega''_0| > |\omega''_1| > \cdots\end{array}\right\}. \tag{14}$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенствъ (13′) будемъ имѣть

$$|e'\omega'_{k+1}| > |\omega'_j|. \tag{15}$$

Если окажется, что

$$|e\omega_{k+1}| > |\omega_j|,$$

то неравенства (13) будутъ существовать при $i = k + 1$, и число i нужно снова увеличить на единицу. Предположимъ, что

$$|e\omega_{k+1}| < |\omega_j|. \tag{16}$$

Начнемъ число j увеличивать. На основаніи неравенствъ (14) убѣждаемся, что всегда можно найти такое значеніе j, при которомъ неравенства (15) и (16) не будутъ имѣть мѣста. Предположимъ, что $j = t$ есть наибольшее значеніе числа j, при которомъ неравенства (15) и (16) существуютъ одновременно. Мы предполагаемъ слѣдовательно:

1) $$t \geqq j; \tag{17}$$

2) $$|e\omega_{k+1}| < |\omega_t| \text{ и } |e'\omega'_{k+1}| > |\omega'_t|. \tag{18}$$

Если бы оказалось, что существуетъ неравенство

$$|e'\omega'_{k+1}| > |\omega'_{t+1}|,$$

то необходимо

$$|e\omega_{k+1}| > |\omega_{t+1}|,$$

и число i можно снова увеличить на единицу.

Равенство

$$|e'\omega'_{k+1}| = |\omega'_{t+1}|$$

невозможно, такъ какъ иначе найдемъ

$$|e\omega_k| = |\omega_t|$$

и на основаніи условія (17) и неравенствъ (14) получимъ

$$|e\omega_k| \leqq |\omega_j|,$$

что противорѣчитъ первому изъ неравенствъ (13').

Допустимъ, что

$$|e'\omega'_{k+1}| < |\omega'_{t+1}|.$$

На основаніи перваго изъ неравенствъ (18) имѣемъ кромѣ того

$$|e\omega_{k+1}| < |\omega_t|,$$

и потому на основаніи § 43

$$|e''\omega''_{k+1}| > |\omega''_t|.$$

Слѣдовательно

$$|e''\omega''_k| > |\omega''_t|.$$

На основанiи неравенствъ (13') и условiя (17) получимъ

$$|\varepsilon\omega_k| > |\omega_i|,$$

и потому необходимо

$$|\varepsilon'\omega'_{k+1}| < |\omega'_i|,$$

что противорѣчитъ неравенствамъ (18).

Продолжая эти разсужденiя дальше, убѣждаемся, что при всякомъ значенiи $i \geqq k$ можно найти число j, удовлетворяющее неравенствамъ (13), полагая же $i = mu + i_1$, гдѣ $i_1 \geqq k$, убѣждаемся, что эти неравенства возможны и при $i < k$.

Основываясь на доказанномъ предложенiи, не трудно убѣдиться въ томъ, что единицы E и E_2, опредѣляемыя равенствами (8), независимыя.

На основанiи равенствъ (10) находимъ

$$\omega_s E = \xi\omega_m, \quad \omega'_s E' = \xi'\omega'_m \quad \text{и} \quad \omega''_s E'' = \xi''\omega''_m. \qquad (19)$$

Такъ какъ системы Φ_0, Φ_1, ... принадлежащiя къ ряду (3), приведенныя системы 3-го рода, то на основанiи равенствъ (7) получаемъ неравенства

$$|\xi_j| < 1, \quad |\xi'_j| < 1 \quad \text{и} \quad |\xi''_j| > 1, \quad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Слѣдовательно, на основанiи равенства (9)

$$|\xi| < 1 \quad \text{и} \quad |\xi'| < 1.$$

На основанiи равенствъ (19) находимъ

$$|\omega_s E| < |\omega_m| \quad \text{и} \quad |\omega'_s E'| < |\omega'_m|.$$

Основывая на доказанномъ выше предложенiи, убѣждаемся, что при всякомъ значенiи числа i можно найти число j, удовлетворяющее неравенствамъ

$$|\omega_j E| < |\omega_i| \quad \text{и} \quad |\omega'_j E'| < |\omega'_i|.$$

Слѣдовательно, при всякомъ цѣломъ положительномъ значенiи числа v и произвольномъ значенiи i можно найти число j, удовлетворяющее неравенствамъ

$$|\omega_j E^v| < |\omega_i| \quad \text{и} \quad |\omega'_j (E')^v| < |\omega'_i|. \qquad (20)$$

Если бы существовало равенство

$$E^v = \pm E_2^u$$

при какихъ нибудь цѣлыхъ значенiяхъ v и u, то можно было бы предполагать, что $v > 0$. Но въ этомъ случаѣ на основанiи неравенствъ (20) получили бы

$$|\omega_{j+mv}| < |\omega_i| \quad \text{и} \quad |\omega'_{j+mv}| < |\omega'_j|.$$

Эти неравенства противорѣчатъ неравенствамъ (14); слѣдовательно единицы E и E_2 независимыя.

Обращаемся теперь къ разысканію цѣлаго числа v, при которомъ возможно равенство

$$|eE^v\omega_i| = |\omega_j|. \tag{21}$$

Мы можемъ предполагать, что при $v = 0$ равенство (21) не можетъ существовать ни при какихъ значеніяхъ i и j.

Изъ двухъ единицъ e и $\frac{1}{e}$ выберемъ ту, для которой неравенства

$$|e\omega_i| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |e'\omega'_i| > |\omega'_j| \tag{22}$$

возможны при нѣкоторыхъ значеніяхъ чиселъ i и j. Въ томъ, что такой выборъ всегда можно сдѣлать, убѣждаемся слѣдующимъ образомъ.

Допустимъ, что неравенства (22) невозможны ни для e, ни для $\frac{1}{e}$, и опредѣлимъ число t изъ условій

$$|\omega_{t+1}| < |e| < |\omega_t|. \tag{23}$$

Можно предполагать, что существуютъ неравенства

$$|\omega'_{t+1}| > |e'| > |\omega'_t|, \tag{24}$$

иначе неравенства (22) будутъ возможны или для e, или для $\frac{1}{e}$.

На основаніи неравенствъ (23) и (24) получимъ

$$|e''| > |\omega''_t|.$$

Такимъ же образомъ находимъ

$$|\omega_{h+1}| < \left|\frac{1}{e}\omega_t\right| < |\omega_h|$$

и

$$|\omega'_{h+1}| > \left|\frac{1}{e'}\omega'_t\right| > |\omega'_h|.$$

Слѣдовательно

$$\left|\frac{1}{e''}\omega''_t\right| > |\omega''_h|.$$

На основаніи неравенствъ

$$|e'| > |\omega'_t|, \quad |e''| > |\omega''_t| \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{e'}\omega'_t\right| > |\omega'_h|, \quad \left|\frac{1}{e''}\omega''_t\right| > |\omega''_h|$$

найдемъ

$$|\omega'_h| < 1 \quad \text{и} \quad |\omega''_h| < 1.$$

Эти неравенства противорѣчатъ неравенствамъ (14).

Въ дальнѣйшемъ мы предполагаемъ, что при всякомъ значеніи числа i можно найти число j, удовлетворяющее неравенствамъ (22).

Можетъ случиться, что при нѣкоторыхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ числа v можно найти числа i и j, удовлетворяющія неравенствамъ

$$|eE^v\omega_i| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |e'(E')^v\omega'_i| > |\omega'_j|, \tag{25}$$

но эти неравенства не могутъ существовать при всѣхъ цѣлыхъ положительныхъ значеніяхъ v. Въ этомъ убѣждаемся слѣдующимъ образомъ. Полагая въ неравенствахъ (20) $i = 0$ и опредѣляя $j = k$, найдемъ

$$|E^v\omega_k| < 1 \quad \text{и} \quad |(E')^v\omega'_k| < 1. \tag{26}$$

Полагая въ неравенствахъ (25) $i = k$ и опредѣляя $j = t$, получимъ

$$|eE^v\omega_k| > |\omega_t| \quad \text{и} \quad |e'(E')^v\omega'_k| > |\omega'_t|.$$

Слѣдовательно

$$|\omega_t| < |eE^v\omega_k| < |e| \quad \text{и} \quad |\omega'_t| < |e'(E')^v\omega'_k| < |e'|. \tag{27}$$

На основаніи неравенствъ

$$|\omega_t| < |e| \quad \text{и} \quad |\omega'_t| < |e'|$$

убѣждаемся, что число t не можетъ превосходить конечнаго предѣла. Но въ такомъ случаѣ, на основаніи леммы V-й § 42, неравенства (27) при неограниченномъ увеличеніи числа v могутъ существовать только при условіи, что имѣютъ мѣсто равенства вида

$$|eE^{v_0}\omega_{k_0}| = |eE^{v_1}\omega_{k_1}| \text{ и т. д.}$$

На основаніи этихъ равенствъ находимъ, напримѣръ,

$$\omega_{k_0} = \pm E^{v_1 - v_0}\omega_{k_1},$$

что, какъ мы видѣли раньше, невозможно. Слѣдовательно, всегда можно найти такое значеніе v, что неравенства (25) не будутъ существовать ни при какихъ значеніяхъ чиселъ i и j. Предположимъ, что v есть наименьшее такое число. Обозначимъ

$$eE^{v-1} = e_0 \text{ и т. д.} \tag{28}$$

По условію можно найти числа i и j, удовлетворяющія неравенствамъ

$$|e_0\omega_i| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |e'_0\omega'_i| > |\omega'_j|,$$

но неравенства

$$|e_0 E \omega_i| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |e'_0 E' \omega'_i| > |\omega'_j|$$

не могутъ существовать ни при какихъ значеніяхъ чиселъ i и j.

Обозначимъ такъ же, какъ въ § 57,

$$e_0 = \tau_0, \quad e_0\xi_0 = \tau_1, \quad e_0\xi_0\xi_1 = \tau_2, \ldots$$

Среди системъ

$$(\tau_0, \tau'_0, \tau''_0), \quad (\tau_1, \tau'_1, \tau''_1), \ldots (\tau_r, \tau'_r, \tau''_r)$$

относительныхъ minima коваріантныхъ формъ F_0 можетъ находиться нѣсколько системъ $(\tau_{h-1}, \tau'_{h-1}, \tau''_{h-1})$, элементы которыхъ удовлетворяютъ неравенствамъ

$$|\tau_{h-1}| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |\tau'_{h-1}| > |\omega'_j| \tag{29}$$

при нѣкоторомъ значеніи числа j, напримѣръ, если $h = 1$, но ни при какихъ значеніяхъ j неравенства

$$|\tau_r| > |\omega_j| \quad \text{и} \quad |\tau'_r| > |\omega'_j| \tag{30}$$

не возможны одновременно. Въ самомъ дѣлѣ, по условію

$$\tau_r = e_0\xi_0\xi_1 \ldots \xi_{r-1},$$

и потому на основаніи равенствъ (9) и (10)

$$\tau_r = e_0\xi = e_0\omega_s E E_2^{-1}. \tag{31}$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенствъ (30) получили бы

$$|e_0 E \omega_s| > |\omega_{j+m}| \quad \text{и} \quad |e'_0 E' \omega'_s| > |\omega'_{j+m}|,$$

что противорѣчитъ предположенію. Предположимъ, что h наибольшее число, при которомъ неравенства (29) возможны. Совершенно такъ же, какъ въ § 57, убѣждаемся, что при нѣкоторомъ значеніи j будетъ существовать равенство

$$|\tau_h| = |\omega_j|.$$

Полагая $j = mu + k$, гдѣ $0 \leq k < m$, приходимъ къ заключенію, что система Φ_h преобразуется въ систему F_k подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1;$$

по условію это возможно только тогда, когда $h = r$, и потому

$$|\tau_r| = |\omega_j|.$$

На основаніи равенствъ (31) и (28) находимъ

$$|eE^{v}\omega_{s}| = |\omega_{j+m}|,$$

что и требовалось доказать.

Разысканіе алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

§ 59.

Предположимъ, что коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ

$$F = \begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix}$$

соотвѣтственно сопряженныя алгебраическія числа, зависящія отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

Относительно этихъ чиселъ дѣлаемъ слѣдующее предположеніе:

Если $\alpha + \alpha'\varphi + \alpha''\psi$ *цѣлое алгебраическое число, то, какія бы значенія ни имѣли цѣлыя раціональныя числа* t, t' *и* t'', *всегда можно найти цѣлыя раціональныя числа* X, X' *и* X'', *удовлетворяющія равенству* *)

$$(\alpha+\alpha'\varphi+\alpha''\psi)(t+t'\varphi+t''\psi) = X+X'\varphi+X''\psi.$$

Требуется найти всѣ алгебраическія единицы, которыя заключаются въ формѣ

$$e = t+t'\varphi+t''\psi.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ всякой алгебраической единицѣ e соотвѣтствуетъ подстановка Σ, которая не измѣняетъ системы F, и подстановка Σ', которая не измѣняетъ системы F' эквивалентной системѣ F.

Сохраняя обозначенія предыдущаго параграфа, предположимъ, что

$$E_2 = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{m-1} \quad \text{и} \quad E = \xi_0\xi_1 \ldots \xi_{r-1}\varphi_s \ldots \varphi_{m-1}. \tag{1}$$

Въ формѣ

$$e = \pm E_2^u E^v$$

заключаются всѣ единицы разсматриваемой области.

Въ предыдущемъ параграфѣ мы находили приведенныя системы 2-го и 3-го рода, но очевидно, что, вычисляя приведенныя системы двухъ различныхъ родовъ, можно такимъ же образомъ получить основныя системы единицъ.

---

*) См. отдѣлъ II, § 38.

Замѣтимъ еще, что если E и E_2 основныя единицы, то, опредѣляя единицу E_0 равенствомъ

$$E_0 = EE_2^u,$$

при всякомъ цѣломъ раціональномъ значеніи числа u будемъ получать основную систему единицъ E_0 и E_2. Напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда въ равенствахъ (1) произведеніе

$$\xi_0\xi_1 \ldots \xi_{r-1} = E_3$$

есть алгебраическая единица, будемъ имѣть $s = 0$, и потому

$$E = E_3 E_2,$$

т. е. единицы E_2 и E_3 представляютъ основную систему.

Примѣръ.

Для уравненія $\rho^3 = 7\rho + 2$ мы опредѣляли въ § 53 періодъ приведенныхъ системъ 1-го рода, состоящій изъ двухъ системъ (стр. 168):

$$\left[1,\ \frac{3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right] \text{ и } \left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right]. \qquad (2)$$

Первую изъ этихъ системъ преобразуемъ подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad (3)$$

въ приведенную систему 2-го рода. Система эта

$$\left[1,\ 7-\rho^2,\ \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}\right] \qquad (4)$$

получена нами на стр. 170. Слѣдующая за ней приведенная система 2-го рода:

$$\left[1,\ \frac{6+\rho-\rho^2}{4},\ \frac{-10-3\rho+\rho^2}{4}\right]. \qquad (5)$$

Эта система очевидно не можетъ быть преобразована въ первую изъ системъ (2) подстановкой вида (3). Узнаемъ, можно ли ее преобразовать во вторую систему. Числа β, β' и β'' опредѣляемъ изъ условія:

$$\beta + \beta' \frac{6+\rho-\rho^2}{4} + \beta'' \frac{-10-3\rho+\rho^2}{4} = \frac{-2+\rho+\rho^2}{4}.$$

Получаемъ уравненія

$$\beta'-3\beta'' = 1, \quad -\beta'+\beta'' = 1 \quad \text{и} \quad 4\beta+6\beta'-10\beta'' = -2,$$

изъ которыхъ находимъ $\beta'=-2$, $\beta''=-1$ и $\beta=0$.

Числа γ, γ' и γ'' опредѣляемъ изъ уравненій

$$\gamma'-3\gamma''=1,\quad -\gamma'+\gamma''=-3 \quad \text{и} \quad 4\gamma+6\gamma'-10\gamma''=2.$$

Получаемъ

$$\gamma'=4,\quad \gamma''=1 \quad \text{и} \quad \gamma=-3.$$

Опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

равенъ 2, и потому система (5) не можетъ быть преобразована ни въ одну изъ системъ (2) подстановкой вида (3).

Замѣтимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ можно было бы въ этомъ убѣдиться, не опредѣляя чиселъ β, γ и т. д., такъ какъ число $m'n''-m''n'$ для одной системы равно -4, а для другой -2, въ томъ же случаѣ, когда преобразованіе возможно, оба эти числа равны по численной величинѣ.

Систему (5) преобразуемъ въ слѣдующую за ней приведенную систему 2-го рода. Получимъ снова систему (4). Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ $m=2$, $r=2$, $s=0$ и

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_0=\dfrac{3\rho+\rho^2}{2}, & \varphi_1=\dfrac{-2+\rho+\rho^2}{4} \\ \xi_0=7-\rho^2, & \xi_1=\dfrac{6+\rho-\rho^2}{4} \end{array}\right\}.$$

Обозначая

$$E_1=\frac{3\rho+\rho^2}{2}\cdot\frac{-2+\rho+\rho^2}{4}=1+3\rho+\rho^2$$

и

$$E=7-\rho^2.\frac{6+\rho-\rho^2}{4}.E_1=\frac{4-\rho-\rho^2}{2},$$

получимъ основную систему единицъ

$$1+3\rho+\rho^2 \quad \text{и} \quad \frac{4-\rho-\rho^2}{2}.$$

Вмѣсто единицы E можемъ взять единицу

$$E_2=7-\rho^2.\frac{6+\rho-\rho^2}{4}=\frac{20+\rho-3\rho^2}{2}.$$

Единицы

$$1+3\rho+\rho^2 \quad \text{и} \quad \frac{20+\rho-3\rho^2}{2}$$

также представляютъ основную систему.

Можно было бы получить еще другія основныя системы единицъ, разсматривая приведенныя системы 3-го рода.

Объ идеалахъ, принадлежащихъ къ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ.

§ 60.

Мы разсматриваемъ идеалы, принадлежащіе къ области алгебраическихъ чиселъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени

$$\rho^3 = r\rho + s$$

съ положительнымъ дискриминантомъ D.

Всѣ результаты, полученные нами въ отдѣлѣ II, § 39 при разсмотрѣніи идеаловъ и соотвѣтствующихъ имъ системъ коваріантныхъ формъ, зависящихъ отъ корней уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ, примѣняются и къ разсматриваемому случаю, лишь съ слѣдующими измѣненіями.

Всегда можно найти идеалъ

$$XP + X'P'\frac{M+\rho}{\delta} + X''P''\frac{N+N'\rho+\rho^2}{\delta^2\sigma},$$

эквивалентный данному идеалу и удовлетворяющій условію

$$\frac{P^2}{P'P''}\delta^3\sigma < \sqrt{D}. \tag{1}$$

Это предложеніе доказывается такъ же, какъ и соотвѣтствующее предложеніе § 39. Измѣненіе заключается лишь въ томъ, что опредѣлитель $\varkappa$ системы

$$\left[1,\ \frac{m+m'\rho+m''\rho^2}{kk'},\ \frac{n+n'\rho+n''\rho^2}{kk'}\right] \tag{2}$$

въ разсматриваемомъ случаѣ опредѣляется равенствомъ

$$\varkappa = \frac{1}{k^2k'}\cdot\sqrt{D},$$

и если система (2) приведенная, то на основаніи теоремы § 54

$$k^2k' < \sqrt{D}.$$

Такъ же, какъ въ § 39, мы можемъ найти всѣ приведенныя си-

стемы одного и того же рода, соотвѣтствующія идеаламъ, которые удовлетворяютъ условію (1). Всѣ эти системы будутъ эквивалентны системамъ, принадлежащимъ къ нѣсколькимъ періодамъ приведенныхъ системъ одного и того же рода. Въ § 39 мы видѣли, что число такихъ періодовъ равно числу классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ, но въ разсматриваемомъ случаѣ число различныхъ періодовъ одного и того же рода еще не опредѣляетъ числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ. Можетъ случиться, что системы, принадлежащія къ различнымъ періодамъ, будутъ эквивалентны. При помощи теоремы § 57 не трудно узнать, какіе періоды могутъ быть преобразованы одинъ въ другой. Выбирая изъ такихъ періодовъ представителемъ одинъ какой нибудь періодъ, въ результатѣ получимъ нѣсколько періодовъ, число которыхъ равно числу классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ.

Примѣръ.

Опредѣлимъ число классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ (идеальныхъ чиселъ), зависящихъ отъ корня уравненія

$$\rho^3 = 7\rho + 2.$$

Здѣсь

$$D = 316.4.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ случаѣ $\delta = 1$ и $\sigma = 2$, то мы должны найти всѣ идеалы, недѣлящіеся ни на какое цѣлое раціональное число и удовлетворяющіе условію

$$\frac{P^2}{P'P''} . 2 < \sqrt{4.316}$$

или

$$\frac{P^2}{P'P''} < \sqrt{316} < 18. \qquad (3)$$

Нужно, слѣдовательно, разложить простыя числа

2, 3, 5, 7, 11, 13 и 17

на простые идеальные множители.

Обозначая черезъ (π, p) и (π', p) простыя идеальныя числа 1-го порядка, а черезъ (π_1, p) простыя идеальныя числа 2-го порядка, найдемъ

$2 = (\pi, 2)(\pi', 2)^2$;
3 = простое идеальное число;
5 = простое идеальное число;
7 = простое идеальное число;
$11 = (\pi, 11)(\pi_1, 11)$;
13 = простое идеальное число;
$17 = (\pi, 17)(\pi_1, 17)$.

Опредѣляемъ при помощи таблицы идеаловъ и идеальныхъ чиселъ, помѣщенной въ § 43 нашего сочиненія „О цѣлыхъ алгебраическихъ числахъ и т. д.“, всѣ идеальныя числа, которымъ соотвѣтствуютъ идеалы, удовлетворяющіе условію (3). Полученные результаты помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ.

Идеаль. числ.	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''	Идеаль. числа	P, P', P''
1	1, 1, 1	$(\pi', 2)^3$	4, 1, 2	$(\pi, 2)(\pi', 2)$	2, 2, 1
$(\pi, 2)$	2, 1, 1	$(\pi', 2)^4$	4, 2, 2	$(\pi, 2)^2(\pi' 2,)$	4, 2, 1
$(\pi, 2)^2$	4, 1, 1	$(\pi', 2)^5$	8, 2, 2	$(\pi_1, 11)$	11, 11, 1
$(\pi', 2)$	2, 1, 1	$(\pi', 2)^6$	8, 4, 2	$(\pi_1, 17)$	17, 17, 1
$(\pi', 2)^2$	2, 1, 2	$(\pi', 2)^8$	16, 8, 2		

Найдемъ всѣ идеалы, соотвѣтствующіе идеальнымъ числамъ, помѣщеннымъ въ таблицѣ. Системы коваріантныхъ формъ, соотвѣтствующія этимъ идеаламъ, преобразуемъ въ приведенныя системы 1-го рода подстановками вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

въ тѣхъ случаяхъ, когда такое преобразованіе возможно. Полученные результаты помѣщаемъ въ слѣдующей таблицѣ.

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣт. системы формъ	
1	$X+X'\rho+X''\,\frac{\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{3\rho+\rho^2}{2}, \frac{\rho+\rho^2}{2}\right]$	*
$(\pi, 2)$	$X\,2+X'\rho+X''\,\frac{2+\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-2+\rho+\rho^2}{4}, \frac{2+\rho-\rho^2}{4}\right]$	*
$(\pi, 2)^2$	$X\,4+X'(2+\rho)+X''\,\frac{2+\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-6+\rho+\rho^2}{8}, \frac{2+\rho-\rho^2}{8}\right]$	
$(\pi', 2)$	$X\,2+X'(1+\rho)+X''\,\frac{2+\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{1+\rho}{2}, \frac{4+\rho-\rho^2}{4}\right]$	*

Идеаль. числа	Соотвѣтствующіе идеалы	Соотвѣтств. системы формъ	
$(\pi', 2)^2$	$X2+X'(1+\rho)+X''2\ \frac{1+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{1+\rho}{2}, \frac{-1+2\rho+\rho^2}{2}\right]$	*
$(\pi', 2)^3$	$X4+X'(-1+\rho)+X''2\ \frac{-1+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-1+\rho}{4}, \frac{-1+\rho^2}{4}\right]$	
$(\pi', 2)^4$	$X4+X'2(1+\rho)+X''2\ \frac{-1+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{1+\rho}{2}, \frac{-3+2\rho+\rho^2}{4}\right]$	*
$(\pi', 2)^5$	$X8+X'2(-1+\rho)+X''2\ \frac{-1+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-1+\rho^2}{8}, \frac{-1+\rho}{4}\right]$	
$(\pi', 2)^6$	$X8+X'4(1+\rho)+X''2\ \frac{-3+2\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{7+2\rho-\rho^2}{8}, \frac{-3+2\rho+\rho^2}{8}\right]$	
$(\pi', 2)^8$	$X16+X'8(1+\rho)\ X''2\ \frac{5+2\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-11+2\rho+\rho^2}{16}, \frac{1+\rho}{2}\right]$	
$(\pi, 2)(\pi', 2)$	$X2+X'2\rho+X''\ \frac{2+\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-2+\rho+\rho^2}{4}, \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right]$	*
$(\pi, 2)^2(\pi', 2)$	$X4+X'2\rho+X''\ \frac{2+\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-6+\rho+\rho^2}{8}, \frac{\rho}{2}\right]$	
$(\pi_1, 11)$	$X11+X'11\rho+X''\ \frac{-4+5\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{-4+5\rho+\rho^2}{22}, \rho\right]$	
$(\pi_1, 17)$	$X17+X'17\rho+X''\ \frac{-8-13\rho+\rho^2}{2}$	$\left[1, \frac{24+5\rho-3\rho^2}{34}, \frac{-8-13\rho+\rho^2}{34}\right]$	

Приведенныя системы отмѣчены знакомъ *. Оказывается такимъ образомъ, что существуетъ только шесть приведенныхъ системъ 1-го рода, соотвѣтствующихъ идеаламъ разсматриваемой области чиселъ.

Обозначимъ

$$F_1=\left[1,\ \frac{3\rho+\rho^2}{2},\ \frac{\rho+\rho^2}{2}\right],\quad F_2=\left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-\rho^2}{4}\right],$$

$$F_3=\left[1,\ \frac{1+\rho}{2},\ \frac{4+\rho-\rho^2}{4}\right],\quad F_4=\left[1,\ \frac{1+\rho}{2},\ \frac{-1+2\rho+\rho^2}{2}\right],$$

$$F_5=\left[1,\ \frac{1+\rho}{2},\ \frac{-3+2\rho+\rho^2}{4}\right],\quad F_6=\left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right].$$

Каждая изъ этихъ системъ подстановкой

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

преобразуется въ систему, которая можетъ быть сдѣлана приведенной подстановкой вида

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Такимъ образомъ найдемъ, что система F_1 преобразуется въ систему F_6, а система F_6 преобразуется въ систему F_1.

Система F_2 преобразуется въ F_6 и затѣмъ въ F_1. Система F_3 преобразуется въ F_6 и затѣмъ въ F_1. Система F_4 преобразуется въ F_1. Система F_5 преобразуется въ F_4 и затѣмъ въ F_1.

Итакъ всѣмъ шести приведеннымъ системамъ соотвѣтствуетъ одинъ и тотъ же перiодъ, состоящiй изъ приведенныхъ системъ 1-го рода F_1 и F_6. Слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ существуетъ только одинъ классъ идеальныхъ чиселъ — обыкновенныхъ цѣлыхъ алгебраическихъ чиселъ.

Мы нашли, что число 2 разлагается слѣдующимъ образомъ на простые идеальные множители:

$$2 = (\pi, 2)(\pi', 2)^2.$$

Найдемъ $(\pi, 2)$ и $(\pi', 2)$. Идеальному числу $(\pi, 2)$ соотвѣтствуетъ система F_2. Эта система преобразуется въ систему F_6 и затѣмъ въ систему F_1. Такъ какъ

$$F_2 = \left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho+\rho^2}{4}\right] \quad \text{и} \quad F_6 = \left[1,\ \frac{-2+\rho+\rho^2}{4},\ \frac{2+\rho-3\rho^2}{4}\right],$$

то

$$(\pi, 2) = P\,\frac{-2+\rho+\rho^2}{4}\cdot\frac{-2+\rho+\rho^2}{4}.$$

Въ таблицахъ для чиселъ P, P' и P'' находимъ $P = 2$, и потому

$$(\pi, 2) = \frac{2+3\rho+\rho^2}{2}.$$

Идеальному числу $(\pi', 2)$ соотвѣтствуетъ система F_3. Система F_3 преобразуется въ систему F_6 и затѣмъ въ F_1. Слѣдовательно

$$(\pi', 2) = 2\,\frac{1+\rho}{2}\cdot\frac{-2+\rho+\rho^2}{4}$$

или

$$(\pi', 2) = \frac{3\rho + \rho^2}{2}.$$

Число классовъ не эквивалентныхъ идеальныхъ чиселъ можно было бы опредѣлять съ значительно большимъ удобствомъ, если бы былъ извѣстенъ предѣлъ для maximum'а значенія опредѣлителя $\varkappa$, составленнаго изъ коэффиціентовъ системы

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & \varphi', & \psi' \\ 1, & \varphi'', & \psi'' \end{bmatrix}.$$

Разысканіе точнаго низшаго предѣла для maximum'а опредѣлителя $\varkappa$ представляетъ интересный и повидимому очень трудный вопросъ.

a)